Э. КОЛЬМАН

27-370
457
274

ПРЕДМЕТ И МЕТОД СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА—1936

51
К 62

Книга т. Кольмана знакомит читателя с предметом и методом современной математики. На основании фактического материала освещает основные проблемы философского обоснования математики с позиций диалектического материализма. В книге разбирается определение математики как науки, освещается ее место среди других наук, дается характеристика современной ступени ее развития. Основные понятия и закономерности математики излагаются на материале арифметики, алгебры, анализа, геометрии; особо трактуются практическая математика и теория вероятностей. Книга рассчитана на квалифицированных читателей: студентов, аспирантов, преподавателей, научных работников, партийный актив.

МОСКОВСКАЯ БИБЛИОТЕКА имени В. И. Ленина
17922-36
ПОЛНОСТЬЮ

Редактор *Л. Кузьмин* Техред *В. Морозов*

Сдано в набор 2/IV 1936 г. Подписано к печати 14/VII 1936 г. Формат 62×94¹/₁₆. Печ. л. 19³/₄. Зн. в печ. л. 41216. Огиз. № 1719. Заказ № 466. Тираж 10.000 экз. Уполномоченный Главлита Б 26098. Цена книги 5 р., переплет 1 р. 25 к.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Трехпрудный, 9.

Е. КОНЦЕВОЙ, вдохновителю, верному помощнику, литературному редактору и строгому критику этой работы.

ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
6	примечание 1	Энгельс, Дж. В. Лемпло	Энгельс — Дж. В. Лемпло
22	1 снизу	арифметико-геометрическая будет	арифметико-геометрическая средняя будет
150	5 сверху	истолковыватьгеометрии	истолковывать геометрии
259	9 сверху	«следует» получим	«следует», получим
264	2 снизу	Бурали Форти	Бурали—Форти

Кольма. Предмет и метод современной математики.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Мою книгу я предназначаю прежде всего для людей, не являющихся специалистами математиками.

У нас существует немало образованных неспециалистов-естественников, проявляющих живой и глубокий интерес ко всем современным проблемам естествознания. Именно они, советские люди самых различных профессий,—передовые рабочие, инженеры, учителя, врачи, агрономы, студенты,—жадно знакомятся с каждой мало-мальски доступной книжкой, излагающей квантовую механику, учение о наследственности, теорию относительности, новейшие достижения физиологии или астрономии. Какие побуждения движут ими? Конечно, не простое любопытство и не желание блеснуть модным словечком в салонном разговоре, что часто встречается в буржуазном «интеллигентном» обществе. В огромном большинстве ими руководит потребность обобщений, осознанная более или менее глубоко. И не случайно, что видное место среди них занимает наш партийный актив.

Чем сознательнее и деятельнее тот или другой строитель социалистического общества, тем яснее он понимает руководящую роль теории. Наиболее передовые борцы революционной практики—это вместе с тем люди цельного мировоззрения, которое охватывает все явления жизни, всю деятельность и все знание человечества. Каждый этап борьбы, в которой они участвуют, отчетливо воспринимается ими как составная часть величественного исторического процесса, а этот процесс—на фоне векового движения всей природы. «Природе потребовались миллионы лет для того, чтобы создать сознательные существа, а теперь требуются тысячи лет для того, чтобы сознательные существа действовали вместе сознательно, сознательно в опре-

делении не только своих индивидуальных поступков, но и своих действий как массы, и действовали вместе и осуществляли сообща заранее поставленную общую цель. Теперь мы уже близки к достижению этой цели»[1],—так писал Энгельс еще сорок с лишним лет назад.

Единство познания природы и общества лежит в самой основе марксизма-ленинизма, коренится в самом его зарождении. Это мировоззрение было создано, когда Маркс и Энгельс «спасли сознательную диалектику, перенеся ее в материалистическое понимание природы и истории. Но для диалектического и вместе с тем материалистического понимания природы требуется знакомство с математикой и естественными науками»[2]. Маркс и Энгельс положили немало труда на изучение математики, естествознания, техники и их истории. Они проделали огромную критическую работу над всем тем громадным наследством, которое оставили нам все предшествующие классы. Ленин писал, что «продолжение дела Гегеля и Маркса должно состоять в диалектической обработке истории человеческой мысли, науки и техники»[3]. Сталин задачу изучения техники, овладения наукой поставил как важнейшую для нашего времени.

Таким образом, каждый диалектический материалист должен знать основы математики и естественных наук, дающие научное освещение явлений природы. Но это не значит, что от него потребуется, например, умение вычислить интеграл или написать структурную формулу индиго. Надо знать основные факты и законы, главные вехи исторического развития математики и естественных наук, важнейшие проблемы, над которыми они работают в настоящее время. И, понятно, все эти знания, как и любые знания вообще, не сделают из него марксиста-ленинца без активной борьбы за свое мировоззрение, без осуществления его в повседневной работе. «Без работы, без борьбы книжное знание коммунизма из коммунистических брошюр и произведений ровно ничего не стоит, так как оно продолжало бы старый разрыв между теорией и практикой, тот старый разрыв, который составлял самую отвратительную черту старого буржуазного общества»[4].

Все сказанное тем более справедливо в применении как к математикам и естественникам, так и к философам.

Известно, как далеко ушла специализация в любой из современных естественных и математических наук. Так, математики, работающие в различных ответвлениях даже одного и того же

---

[1] Энгельс, Дж. В. Лемпло, «Большевик» № 14, 1935 г., стр. 117.
[2] Маркс и Энгельс, Собр. соч., т. XIV, стр. 8.
[3] Ленин, Философские тетради, стр. 144.
[4] Ленин. Собр. соч., т. XXX, стр. 404—405.

раздела (например, в теории чисел—по арифметической теории форм и по алгебраическим числовым телам), часто совершенно не понимают друг друга. Конечно, при огромном разветвлении, которого достигла математика, неизбежно создается тип исследователя, строго специализирующегося на одном, точно отграниченном предмете. Но не менее важна и задача другого типа ученых, обозревающих науку в целом. Вскрывая общие закономерности ее развития, они содействуют ее дальнейшему движению по наиболее целесообразному пути.

Наши философы хорошо знают, что материалистическую диалектику следует выводить из природы, что нельзя вносить ее туда извне. Поэтому они не могут довольствоваться поверхностным знакомством с естествознанием; в их «технический минимум» должно входить и безбоязненное отношение к математическим формулам, чтобы быть способными прочесть спрятанное за ними существо вопроса.

Многое указывает на то, что именно теперь назрела потребность в книге, дающей общее представление о предмете и методе современной математики.

Предыдущий этап характерен борьбой за перелом в рядах советских математиков, большинство которых было политически «нейтрально», а в вопросах философии стояло на идеалистических позициях. Первое место занимала пропаганда диалектического материализма, пропаганда планирования научной работы и необходимости тесной связи математической науки с практикой социалистического строительства.

На настоящем этапе к прежним, лишь отчасти решенным, задачам прибавилась новая, более сложная. Одной критики и пропаганды уже совершенно недостаточно; материалистическая диалектика в математике должна быть показана в действии.

Правда, и условия для решения этих задач теперь значительно более благоприятны.

Наша партия, руководимая гениальным Сталиным, добилась в упорных боях того, что социализм из далекой и недостижимой утопии превратился в живую действительность, воплощен на безбрежных пространствах огромного материка, в стали, чугуне, бетоне, граните новых заводов и городов, в богатых всходах полей, в новом человеке—борце и строителе, герое этой великой эпохи. Ощущая все эти гигантские успехи социалистического строительства и наблюдая в то же время деградацию буржуазной науки, громадное большинство научных работников Советского союза, а среди них и математики, перешло как в области политики, так и в области методологии на позиции пролетариата и его партии.

В 1933 г. были опубликованы важнейшие математические рукописи Маркса, имеющие для математики такое же значение,

как «Диалектика природы» для всего естествознания. В них дан гениальный образец диалектической трактовки истории математики в такой важной области, как дифференциальное исчисление, вскрыто содержание ряда основных математических понятий, операций и символов как отражений реальных процессов.

Из многих сотен тысяч новых пролетарских кадров выделились десятки тысяч исследователей, молодых ученых и просто людей, глубоко заинтересованных в освоении всего наследства буржуазной науки с марксистской точки зрения.

В виде откликов на статьи в журналах «Большевик» и «Под знаменем марксизма» приходилось получать письма из разных концов Союза, красноречиво говорящие о массовом интересе к тонким, абстрактным вопросам философии математики, о большой работе, которая ведется на местах. Эта книга представляет своего рода попытку хотя бы отчасти удовлетворить этот интерес. Несколько лекций, прочитанных мною в 1934/35 учебном году для слушателей последнего курса Института философии красной профессуры в Москве, в значительно переработанном виде легли в основу четырех (из десяти) глав книги.

Быть может, нелишне будет указать,что данная работа не является учебником. Поэтому взявшиеся за нее с тем, чтобы выучиться, например, решать квадратные уравнения, обращаться с логарифмами или приобрести навык в дифференцировании, будут сильно разочарованы. Но, не давая в ней того систематического изложения, которого мы в праве требовать от курса алгебры, анализа и т. п., в то же время нельзя было исходить из ложного предположения, будто читателю все основные понятия и законы хорошо известны. Учитывая, что читатель, даже изучавший все это, мог многое позабыть, а многое усвоить формально, я стремился, по возможности, не вводить ни одного нового понятия без более или менее доступного объяснения его. Но необходимо подчеркнуть, что, как и всякое математическое сочинение, данная книга может быть понята лишь при условии последовательного ее изучения. Пропустив одно какое-либо логическое звено, читатель не сможет понять дальнейшего изложения.

Как уже сказано, эта книга написана для людей, не являющихся специалистами в области математики. Но это и не книга «по поводу» математики. Она по существу конкретно знакомит с предметом и методом современной математики и лишь на основании самих фактов пытается делать те или другие философские выводы. Этим объясняется и ее структура (специально вопросам обоснования математики посвящена не первая, а последняя глава) и то, что крайне экономно даны ссылки на работы

основоположников марксизма. Надеюсь, что найдутся лишь немногие, которые по этой причине не заметят, что мысли, содержащиеся в этих работах, послужили основой всего изложенного.

Принято, что в предисловии автор обращается к читателю с просьбой о снисхождении. И в данном случае имелись бы к этому все основания. Во-первых, марксистских работ по отдельным вопросам философии и истории математики существуют лишь единицы, и даже немарксистская история математики доходит почти всегда только до XIX века. Во-вторых, изложить столь сложный предмет популярно и притом без вульгарных упрощений представляет задачу громадной трудности. В-третьих, мне хорошо известно, насколько неполна эта книга в смысле охвата ряда вопросов, а также насколько неравна степень популярности в разных местах книги. Именно поэтому я прошу читателя отнестись к ней строго критически и все свои замечания и пожелания довести через издательство до моего сведения.

Наконец, прежде чем перейти к самому изложению, мне хочется поблагодарить тт. *А. Н. Колмогорова* и *С. А. Яновскую*, любезно просмотревших всю рукопись и сделавших к ней ряд ценных, мною использованных указаний, а также т. *П. С. Александрова*, давшего свои замечания к седьмой главе.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Определение математики, ее место среди других наук. — Первая ступень абстракции, натуральный ряд; расширение понятия числа.—Вторая ступень абстракции, переменные символы, алгебра, анализ.—Третья ступень абстракции, переменные операции, современная математика.

Определение Энгельса гласит, что математика—это наука, имеющая своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира. Из этого определения ясно, что математика не может считаться только наукой о природе или только наукой общественной, ибо пространственные формы и количественные отношения присущи как естественным, так и общественным процессам. Поэтому математику нельзя включить ни в область естественных наук, ни в область социальных наук: она стоит вне круга и естественных и социальных наук, занимая в смысле своего применения различное положение относительно каждой отдельной науки, например, механики, биологии, политэкономии, к чему мы еще вернемся в дальнейшем изложении.

Это особое положение математики дало повод идеалистической философии считать математику наукой, стоящей как над естественными, так и над общественными науками. Так, например, Кант полагал, что «всякая наука лишь постольку является наукой, поскольку она есть математика». А такой философ, как Огюст Конт, и с ним вся позитивистская, а дальше и вся прагматическая философия и махизм считают, что математические науки являются вершиной человеческого

познания в том смысле, что они предписывают другим наукам свои законы.

И в том и в другом случае мы имеем идеалистическое толкование правильного положения, что математика—это наука, трактующая о тех закономерностях действительного мира, которые общи и природе и обществу. Нам станет еще более понятным, как идеалистическая философия извращает понятие предмета математики и ее развития, если мы рассмотрим метод, которым пользуется математика.

Метод математики, что опять-таки вытекает из ее определения,—это метод абстракции. Ведь если математика трактует о пространственных формах и количественных отношениях действительного мира, то совершенно ясно, что, для того чтобы из этого действительного мира получить такой односторонний снимок, каким является предмет математики, нужна абстракция чрезвычайно большой силы. Но абстракция означает не что иное, как отвлечение пространственных форм и количественных отношений от их конкретного, материального, вещественного содержания. Поэтому единственный метод, которым работает математика, состоит в том, что она из действительного мира односторонне вырывает эти количественные отношения и пространственные формы, применяя все более и более сильную абстракцию. Эта абстракция поднимается на все более и более высокую ступень в зависимости от того уровня, на котором находится математическое знание, в зависимости от того исторического процесса, в котором развивается математическое познание действительного мира.

Предваряя весь ход дальнейшего изложения, следует заметить, что математическая абстракция прошла за тысячелетия существования математической науки три ступени. Тот, кто желает понять дух современной математики, должен ознакомиться с этой эволюцией.

Первая ступень принадлежит к тому времени, когда зарождалась математическая наука—к моменту самого ее возникновения. На этой ступени абстракции родилось первое основное понятие, с которым работает математика,—понятие числа.

Для того чтобы перечислить какую-нибудь совокупность предметов, необходимо отождествить эти предметы друг с другом, т. е. отвлечься от бесконечного разнообразия индивидуальных качеств, которыми обладает каждый из этих предметов. Чтобы сказать: передо мной «три коровы» (а первоначальное возникновение счета связано с простой формой обмена у первобытных племен и вообще с экономикой первобытного человека, охотника или, позднее, скотовода),для того чтобы иметь возможность сосчитать их, надо отвлечься от всех индивидуальных свойств, которые имеются у каждой из этих коров (о том, как

происходит самый процесс отвлечения, мы скажем позднее). Значит, надо создать родовое понятие «корова», понятие, возникновение которого предшествует процессу счета. Каждый отдельный представитель рода «корова» играет при счете роль «единицы».

Самый процесс счета первоначально состоит из пересчитывания. В натуре перебираются отдельные элементы совокупности и тем самым устанавливается некоторый порядок следования их один за другим. Так возникает сначала понятие порядкового числа—первый, второй третий и т. д. Лишь на значительно высшей ступени развития число отделяется от этого порядкового содержания, выступая как количественное число. Это происходит лишь тогда, когда укрепляется убеждение, что количество не зависит от порядка счета. Нужно однако отметить, что существует и другой взгляд, согласно которому количественное число исторически и логически предшествует числу порядковому.

Таким образом, первая ступень абстракции приводит к понятию чисел: один, два, три, четыре и т. д., т. е. целых положительных чисел, к тому ряду чисел, который мы называем в математике натуральным рядом, т. е. рядом чисел, полученных естественным процессом счета. Значит, эта первая ступень абстракции состоит в том, что мы, отвлекаясь от качественных свойств отдельных объектов, получаем возможность отождествления этих объектов друг с другом, создания единицы, к которой мы приравниваем эти объекты, пересчитывая их по порядку, а затем и по их количеству,—создания порядковых и количественных чисел. Дальнейший шаг, завершающий первую ступень абстракции,—это создание символов для чисел — цифр в любом их начертании, все равно в нашем, десятичном или в каком-либо другом. Над числами производятся простейшие операции—сложение, вычитание, умножение и деление. Это приводит в дальнейшем в свою очередь, во-первых, к тому, что люди убеждаются, что натуральный ряд чисел неограничен, что в нем нет последнего числа, во-вторых, к необходимости расширения понятия числа, создания новых видов чисел, как-то: нуль, отрицательные числа,—хотя следует отметить, что арифметические операции вовсе не являются единственным источником создания новых видов чисел. Так возникает основной костяк, на котором строится арифметика.

Нечто аналогичное имело место и в геометрии. Понятия фигуры—геометрического тела,—а затем поверхности, линии и точки возникли путем абстрагирования от конкретных материальных тел в результате манипуляций над ними, манипуляций, носящих производственный характер. Более того, из само-

го материального производства—из строительного, гончарного, портняжного, землемерного дела и т. д.—выросли самые геометрические правила и предложения. При этом не только на первой ступени абстракции, но и гораздо позднее геометрия была обособленной от арифметики наукой, обе они не могли быть объединены в единой логической концепции. Лишь на втором этапе абстракции, начиная с Декарта, когда создается общее понятие алгебраической величины, геометрия впервые соединяется с математикой в узком смысле слова.

На протяжении нескольких тысячелетий люди, принуждаемые практикой жизни, постепенно научились производить простейшие операции с натуральными числами, а для того чтобы эти операции давали удовлетворяющий результат, люди были вынуждены расширить понятие числа, ввести такие числа, как дроби ($^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^5/_4$ и т. д.), потом ввести и такое число, как нуль и отрицательные числа. Но правила, указывающие, как производить эти операции, как, зная определенные из этих чисел, отыскивать другие числа, связанные чем-нибудь с ними, постепенно усложнялись и были очень разрознены. Тогда, в эпоху перехода от ремесленного способа производства к мануфактуре, возникла потребность дальнейшего обобщения, потребность в переходе ко второй ступени абстракции.

Она состоит в том, что стали отвлекаться от конкретного количественного значения символов чисел, являющихся отвлечениями от качественных особенностей действительных объектов,—эти символы стали переменными. Если, скажем, были известны такие правила, что $1+2=2+1$, или что $3+7=7+3$, или что $4+11=11+4$ и т. д. и т. п., то отсюда, отвлекаясь от количественного значения чисел 1 и 2, или 3 и 7, или 4 и 11, выводили правило, имеющее значительно бóльшую общность, а именно: что сумма двух чисел от перестановки обоих слагаемых не меняется. Это правило мы можем проверить эмпирически на сотнях, на тысячах, а если хватит терпения и достаточно длительной жизни, то и на миллионах, на десятках миллионов случаев. Но так как мы никогда не сможем выписать все числа, ибо их беспредельное количество, то утверждение, что это правило верно для всех чисел, таким эмпирическим путем не может быть проверено. Все числа мы никогда не сможем перепробовать. Значит, чтобы первоначально эмпирически полученное правило превратилось в общий закон, который называют законом переместительности сложения, для этого требуется нечто большее, чем одно лишь эмпирическое пробование. Мы должны перейти на новую ступень абстракции. К ней мы переходим тогда, когда вместо этих конкретных чисел 1 и 2, 3 и 7 и т. д. берем любые числа.

Теперь для нас не только безразлично, означает ли, скажем, 2—две коровы или два рубля и т. д., но и безразлично, будет ли это 2, или 7, или 119, или 100. Тогда мы вводим новые, буквенные символы a, b, c и т. д., где под каждой буквой можно подразумевать безразлично какое именно количественное число. И наш закон будет выглядеть так: $a+b=b+a$. На второй ступени абстракции мы переходим от арифметики к алгебре.

Таким образом, алгебра существенно отличается от арифметики. Она отличается большей силой абстракции, ибо вместо работы с отдельными конкретными числами, вроде 1, 30, 0, $^1/_2$, $^3/_4$, —2, —5, $-^2/_3$ и т. д., мы работаем с буквенными символами, причем полученные результаты остаются верными для любых конкретных чисел. В результате при вычислениях достигается громадное сбережение труда, хотя алгебра вовсе и не была создана с преднамеренной целью для достижения одной лишь «экономии мысли», как это изображают махисты. Вместе с тем, раз мы под a понимаем любое число, то это в сущности означает, что это число может менять свое значение, что оно переменное. Таким образом, в алгебру уже вносится, хотя лишь в скрытом виде, элемент изменения. Если арифметика была наукой сугубо статической, то алгебра уже трактует по существу, хотя нигде в ней об этом не упоминается, о переменных величинах. Алгебра завоевала себе господствующее положение в математике не сразу. Это произошло лишь после того, как в 1637 г. Декартом была написана его «Геометрия», и таким образом из сравнительно узкого поля действия—решения уравнений—алгебра завладела и геометрией. Этим уже было предрешено возникновение той части математики, которую часто называют «высшей математикой» и которая научно зовется математическим анализом, изучающим не только в прерывном виде, как это делается в алгебре, а также и в непрерывном переменные величины. Однако полное взаимопроникновение геометрии и арифметики наступает лишь на следующем, третьем, этапе.

Таким образом, между алгеброй и анализом разница не столь большая, как разница между арифметикой и алгеброй. Для того чтобы перейти от арифметики к алгебре, потребовалось подняться на новую, вторую ступень математической абстракции, между тем как для того, чтобы перейти от алгебры к анализу, потребовалось «только» одно: обобщить на непрерывные величины в анализе то, что было в алгебре построено для величин прерывных.

Итак, на второй ступени математической абстракции равенство $a+b=b+a$ понимают так: a—это какое-то число, безразлично какое. Вместо a я могу подставить и 5, и 15, и —1, и $^1/_2$; вместо b могу тоже подставить произвольно какое угодно число—и 0, и 15, и —50—безразлично. Какие бы я ни подставил вместо a и b числа, это равенство остается верным.

На второй ступени абстракции математика находилась примерно до конца прошлого века. Это был период все более и более усложняющихся общественных отношений капитализма, идущего накануне своего империалистического этапа к наибольшему подъему. В операциях, совершаемых картелями, синдикатами и трестами, выражался все более абстрактный характер экономических явлений. Вместе с тем увеличивалась сложность и отвлеченность бурно развивающегося теоретического естествознания, а в особенности физики, выдвинувшей на первый план вместо понятий механики, данных нам непосредственно чувственным опытом, понятия электромагнитной теории. Перед математикой 70—80-х годов встали задачи столь новые, что без решительного сдвига в своем методе она не могла бы справиться с ними. Вскрытие социально-экономической основы произошедшего перехода математики на новую, высшую ступень составляет задачу, ожидающую еще своего разрешения.

Математики стали иначе понимать и изучать равенства, подобные данному. Они полностью отвлеклись от числового содержания символов a и b, а также от того содержания сложения, которое связано с этими числовыми символами. Они стали рассматривать равенство $a+b=b+a$, отвлекаясь от того, что a и b это величины, которые можно считать или измерять, и также от того, что перед нами именно сложение. Они читают это равенство так: имеются два любых объекта—a и b,—и над этими объектами произведена операция, причем она переместительна, т. е. результат получится один и тот же, если объекты поменять местами. Задача математики будет тогда состоять в том, чтобы, во-первых, изучить операции, которые удовлетворяют такому требованию, и, во-вторых, чтобы установить, какие объекты из действительного мира удовлетворяют таким операциям. Значит, здесь имеется новая, третья, высшая ступень абстракции. От наших объектов не требуется, чтобы их можно было считать, измерять, от них не требуется, чтобы это были какие-то, хотя и произвольные, числа. Под a и b можно понимать объекты значительно большей общности, объекты, не поддающиеся простым арифметическим операциям, как сложение, умножение и т. д.

В качестве первого примера возьмем такой процесс, как смешение цветов. Если смешать красный и желтый цвета, то получается, как известно, оранжевый цвет. Если смешать желтый и красный цвета, то получается тоже оранжевый цвет. Значит, мы под a и b можем подразумевать два цвета. Цвета не поддаются простому количественному измерению. И сме-

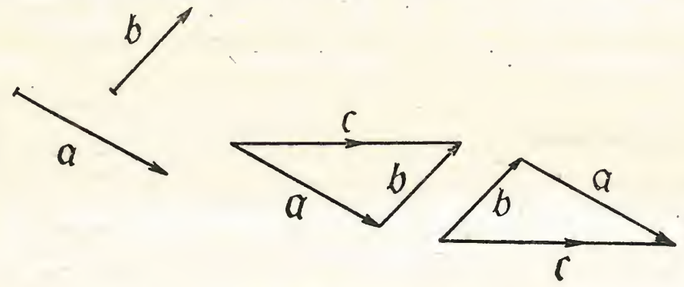
шение цветов—это не простое арифметическое сложение. Несмотря на это, операция смешения цветов—это операция переместительная, здесь действует переместительный закон.

Перейдем ко второму примеру. Сначала припомним, что натуральные числа бывают или четные (т. е. такие, которые делятся на два без остатка) или нечетные (т. е. такие, которые на два не делятся, а дают остаток—единицу). Будем теперь все четные числа a называть числами класса A, а все нечетные числа b назовем числами класса B. Таким образом, мы разделим все натуральные числа на два класса: класс A и класс B. Для этих двух классов A и B существует такая операция, которая обладает переместительностью, так же как это имеет место для чисел, где, как известно, $a+b=b+a$.

На самом деле, если сложить любое четное число с любым нечетным числом, то в результате мы получим нечетное число, что можно записать так: $A+B=B$. Если, наоборот, любое нечетное число сложить с любым четным числом, то мы также получим нечетное число, т. е. $B+A=B$. Из обоих этих равенств следует, что $A+B=B+A$. Таким образом, уже не только для двух чисел, но и для таких понятий, как целые классы чисел, которые не являются величинами в обыкновенном смысле и к которым, как видно из уравнения $A+B=B$, не применима обыкновенная алгебра, все же переместительная операция $A+B=B+A$ остается верной. То, что мы здесь совершили переход к третьей ступени математической абстракции, станет еще более ясным, если над числами обоих классов A и B вместо сложения будем производить обыкновенное арифметическое умножение, т. е. если мы под «сложением» (которое, чтобы его отличить от предыдущего, обозначим вместо $+$ знаком $\times$) $A \times B$ будем понимать умножение любого четного числа a на любое нечетное число b. Результат $A \times B = A$ (четное число a, умноженное на нечетное число b, дает четное число) получится также при перемещении множителей: $B \times A = A$, хотя опять-таки обыкновенная алгебра здесь не действительна.

Третьим примером нам послужит сложение скоростей. Известно, что скорости складываются по правилу параллелограмма. Если какое-нибудь тело—материальная точка, как говорят физики,—должно двигаться со скоростью $\mathfrak{a}$ в одном направлении, и со скоростью $\mathfrak{b}$ в другом направлении, то оно будет двигаться со скоростью $\mathfrak{c}$, которую можно получить, если к концу скорости $\mathfrak{a}$ прибавить скорость $\mathfrak{b}$, сохраняя при этом ее направление, и соединить потом оба конца — это и будет результирующая скорость $\mathfrak{c}$. Как видно, скорости $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ складываются вовсе не по правилам обыкновенного арифметического сложения, ибо результирующая не равна сумме обеих скоростей, взятых чисто

арифметически, но переместительный закон действует здесь, ибо безразлично, прибавить ли к $\mathfrak{a}$ скорость $\mathfrak{b}$ или к $\mathfrak{b}$ скорость $\mathfrak{a}$.



Сложение скоростей

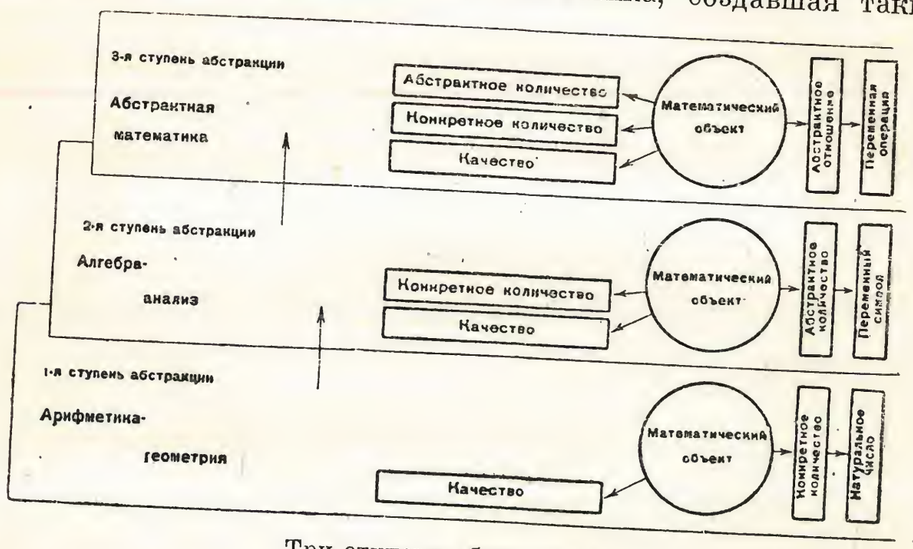
Таким путем строится целый круг математических дисциплин, изучающих операции над объектами, для которых действителен переместительный закон.

Но все это вместе—лишь один из примеров того нового метода, который характерен для математики на высшей, третьей, ступени абстракции. Раньше, когда исследование было сосредоточено на изучении величин, такие математические объекты, как, например, перестановки и их группы (на них мы остановимся в дальнейшем), естественно оставались вне поля зрения математиков. Итак, эта новая, третья, ступень абстракции состоит не только в том, что мы абстрагируемся от качеств отдельных объектов, как это делается на первой ступени абстракции, при самом зарождении математики. Нам также недостаточно абстрагироваться от конкретной количественной величины этих отдельных абстракций, как это делается на второй ступени абстракции. Здесь мы абстрагируемся добавочно еще от самого содержания этих отношений между собою, т. е. переменными мы считаем не только качества объектов, не только количества, но и самые математические операции.

Значит, если мы захотим дать общую характеристику современной математике, математике эпохи империализма, математике, которая зародилась в конце прошлого века и теперь окончательно сформировалась,—мы можем сказать, что она характеризуется тем, что перешла на высшую, третью, ступень абстракции, на такую ступень абстракции, когда мы отвлекаемся, во-первых, от качественного содержания объектов, во-вторых, от их конкретной количественной величины, и, в-третьих, даже вообще от количественного содержания самих математических операций.

Однако здесь необходимо предупредить недоразумение, могущее возникнуть у некоторых читателей. Все возрастающую абстрактность математики ни в коем случае не следует смешивать с отрывом от действительности, полагая, будто современная

сугубо абстрактная математика мало пригодна для изучения конкретных явлений. Ничего подобного! Как мы это увидим в дальнейшем, дело обстоит как раз наоборот. Лишь математика на современной, третьей, ступени, математика, создавшая такие



Три ступени абстракции

отвлеченные понятия, как группа, множество, абстрактное пространство, сумела овладеть тончайшими процессами физики, естествознания вообще, сумела решить сложнейшие задачи новейшей техники. Так, например, использовав в механике некоторое обобщение понятия пространства, создали сначала понятие фазового пространства, а затем абстрактного пространства. С созданием этого понятия изучение в собственном смысле слова пространственных форм действительного материального мира стало окончательно частным случаем изучения форм действительного материального мира вообще. Таким путем были открыты новые закономерности, остававшиеся прежде скрытыми, математика получила особо сильные методы, применимые к ряду новых проблем, поставленных перед ней, которые на прежней ступени абстракции она была бессильна не только решить, но и сформулировать.

Само собой разумеется, что в эту стадию математика не вступила внезапно и что она не развивалась в этом направлении как-то сама из себя. Нет, все развитие математики теснейшим образом связано с развитием естественных наук и техники.

Естественные науки, каждая в отдельности, а также и техника постоянно ставят перед математикой частные задачи, которые обогащают математику, заставляют ее создавать новые вычислительные методы и т. д. В целом же развитие естественных наук и прежде всего развитие физики, как ведущей среди естественных наук, ставит перед математикой более общие проблемы, которые иногда дают ей настолько сильный толчок, что от него меняется все направление развития математики. И наиболее высокая абстракция не возникла имманентно из самой математики, а в конечном счете под давлением развития естественных наук, и прежде всего физики. Однако в то же время математика, которая в целом развивается под непосредственным влиянием естественных наук и техники, имеет и свои собственные законы движения, свою собственную историю, потому что она имеет свой собственный предмет, свои специфические методы. Ряд математических понятий, методов и т. д., возникнув под влиянием естественных наук, затем уже сам развивается дальше, получая лишь время от времени тот или другой толчок извне.

То обстоятельство, что математика—сугубо абстрактная наука, что она так сильно отдаляется от своей единственной базы—от материального мира, от материальной действительности,—это обстоятельство характерно не только для математики в целом, но и для каждой из ее составных частей. Именно поэтому получается так, что из всех наук математика является самой разветвленной наукой, так как каждая ее ветвь в отдельности имеет сильнейшую тенденцию развиваться самостоятельно, образовывая все новые отпочкования. Но подобное богатство разветвлений не приводит к потере единства математики. Верно, что отдельные математики часто являются специалистами лишь в той или другой узкой области математики и что отдельные местные математические школы страдают большой разобщенностью. И все-таки математика—по той же причине своей высокой абстрактности—среди всех наук по преимуществу обладает свойством неделимости, как это доказал Гильберт, строя ее обоснование на едином аксиоматическом методе, в чем убедится читатель, ознакомившись с дальнейшим изложением.

Математика развивается не односвязной цепью: ее развитие подобно весьма разветвленному дереву, причем каждая из веток связана со многими другими ветками более или менее прочно. И хотя она зачастую в основном самостоятельна, так что ее специфические закономерности можно изучить, не зная специфических закономерностей других ответвлений, на нее оказывают влияние многочисленные отрасли математики. Чаще всего сближение самых отдаленных отростков оказывается особенно плодотворным, создает новые, неожиданно далеко идущие обобщения. Ветки переплетаются и скрещиваются между собой, причем нередко возникает новое ответвление.

При всем этом, когда мы говорим о сугубой абстрактности математики, то это вовсе не следует понимать как порицание ей. Наоборот. Как раз в абстрактности состоит, если смотреть

только с точки зрения математики, ее сила. Диалектический материализм учит, что именно абстракция дает возможность познать конкретное наиболее обще и наиболее глубоко. Именно благодаря своей сугубой абстрактности математика служит мощным орудием познания во всех естественных науках, а частично даже и в науках общественных.

Раскрывая единство мира лишь со стороны количественных отношений и пространственных форм материи как объективной реальности, математика является частной наукой по отношению к философии—науке еще более абстрактной, отражающей в своих понятиях единство мира в его многообразии.

Но вместе с тем, благодаря тому что в капиталистических странах господствует идеалистическая философия, что большинство естественников и математиков находится под сильнейшим влиянием различных идеалистических школ, эта сторона математики, ее абстрактность, превращается из ее силы в ее слабость. Идеалисты-естественники и идеалисты-математики забывают о корнях математики, лежащих в действительности и растущих только из действительности, забывают о том, что математика имеет только тогда смысл и значение, если она может прилагаться к этой самой материальной действительности. Поэтому они толкуют ее идеалистически, развивают ее часто на идеалистической основе, кроме того философы-идеалисты используют ее для «доказательства» правильности своей философии.

Современное состояние математики, естественно, определилось всем ходом ее развития. Если глубже всмотреться в развитие математики, то можно в нем выделить два направления математического мышления, которые то идут параллельно друг с другом, то сливаются и снова расходятся. У греков представителями первого направления были Эвклид и ряд его последователей, создавших математику, в которой нет науки о методе, математику хотя и приведенную в стройную систему, но где каждая задача решается своими особыми, специфически органическими методами. Сюда же относятся и такие открытия, как открытие Кардано в середине XVI в.—решения кубических уравнений, или составление таблиц тригонометрических функций, гигантская работа, которая была проделана Коперником и другими, или открытие Непером логарифмов в самом начале XVII в. Все это о т д е л ь н ы е открытия, которые создают новый метод, дающий возможность решить целый ряд задач, с ним связанных.

Представителем второго направления математического мышления у древних греков являлся Архимед. По крайней мере в некоторых своих работах Архимед пытался дать методы, которые решали бы не одну какую-нибудь задачу или группу задач. Несмотря на то что эти методы были, быть может, не

столь хороши для самого конкретного вычисления и довольно неуклюжи, зато они обладали огромной силой о б о б щ е н и я. Подобные методы могут быть распространены если не на всю математику, то по крайней мере на большую ее часть или на несколько ее ветвей. С ними можно делать те или иные модификации и таким образом можно получить новые методы, которые в дальнейшем могут давать еще бо́льшие обобщения.

Противоположность обоих направлений математического мышления коренится в том, что в первом случае данная математическая задача решается сложной комбинацией наличных математических понятий, между тем как во втором случае создаются новые понятия, новые теории. При этом во втором случае, иногда ценой кажущейся излишней общности, удается решить исходную задачу, минуя технические трудности. Таким образом, если ко второму направлению математического мышления теперь часто применяют термин begriffliche Mathematik—математика понятий,—то на это имеется немало оснований. Вместе с тем не следует представлять себе работу математика как необузданное творчество все новых и новых понятий. На самом деле встречающиеся излишества—когда что ни задача, то создаются новые понятия—выравнивает история, производя естественный отбор в тех случаях, когда сам математик оказывается неспособным отобрать наиболее целесообразное и отказаться от введения новых понятий, которые все равно окажутся недолговечными.

Ко второму направлению математического мышления Архимеда принадлежал прежде всего Декарт. До Декарта существовали отдельные методы, рецепты, предписания о том, как решать те или другие уравнения. Декарт создал гениальное обобщение и таким образом, алгебраизировав всю современную ему математику, создал тем самым аналитическую геометрию. Так был создан общий метод, который затем породил целый ряд новых, обширнейших отраслей математики—породил анализ, т. е. дифференциальное, интегральное, вариационное исчисления и т. д. К этому же направлению принадлежат и Лейбниц и Ньютон, которые в середине XVII в., независимо друг от друга, как раз явились создателями методов математического анализа. Эти методы, обладающие большой обобщающей силой, имеют огромное значение, но при их конкретном применении они иногда оказываются довольно громоздкими. Поэтому в каждом отдельном случае не снимается задача создания специального метода, дающего более быстро искомый численный результат.

Предвестниками новой, третьей, ступени математической абстракции была группа математиков XIX в.: Гаусс, который жил с 80-х годов XVIII в. до середины XIX в., затем Абель и Коши, наконец, Риманн, который умер на 11 лет позже Гаусса. У всех них преобладало второе направление математического мышле-

ния. Они не стремились прежде всего к тому, чтобы найти путь, который быстро решает данную конкретную задачу, но при этом ограничен только узким кругом этой задачи. Их стремления были направлены к тому, чтобы, исходя из данной задачи, максимально обобщая ее, создать метод настолько общий, что он мог бы обнять очень большую область математики, хотя бы и за счет сугубой абстрактности.

Приведем пример из истории математики, чтобы показать, как иногда причудливо на первый взгляд работают математики и что́ происходит в самой «лаборатории» математической мысли.

Гаусс, когда ему было 22 года, занялся исследованием так называемой арифметико-геометрической средней. Пусть даны два числа, скажем, 4 и 1. Найдем сначала арифметическую среднюю. Как известно, арифметическая средняя—это число x, которое находится посредине между обоими числами, на одинаковом расстоянии от них: $4-x=x-1$. Вычислим ее, сложив оба числа и разделив полученную сумму на 2, т. е. $x=\frac{4+1}{2}=2{,}5$. Далее, найдем геометрическую среднюю y, число, которое является средним пропорциональным между обоими числами: $4:y=y:1$. Она получается, когда мы перемножим два данных числа между собой и извлечем из произведения квадратный корень, т. е. $y=\sqrt{4\cdot 1}=2$. Продолжая этот же процесс, найдем среднюю арифметическую чисел 2,5 и 2 и среднюю геометрическую этих же двух чисел. Средняя арифметическая будет равна $\frac{2{,}5+2}{2}=2{,}25$. Средняя геометрическая: $\sqrt{2{,}5\cdot 2}=2{,}2361\ldots$ Эту же операцию повторим еще раз, взяв числа 2,25 и 2,2361... Опять находим среднюю арифметическую—она будет равна 2,24305..., и среднюю геометрическую, равную 2,24303... Двигаясь тем же порядком дальше, мы убедимся, что обе средние сходятся на величине 2,2430..., от которой они отличаются лишь во все более и более отдаленных десятичных знаках. Оказывается, каковы бы ни были оба заданных числа, обе средние, вычисляемые указанным способом, будут постепенно приближаться друг к другу, и всегда будет существовать такое число, к которому они будут сходиться. Его-то и называют арифметико-геометрической средней. Однако ясно, что недостаточно убедиться в существовании этой средней подобного рода конкретным вычислением, а надо ее существование д о к а з а т ь. Ведь не исключена возможность, что оба ряда средних арифметических и геометрических, все больше сближающихся друг с другом, например, после тысячного повторения указанного процесса, перестанут сближаться или даже вдруг снова начнут расходиться. Или же, что для чисел 1 и 4 действительно арифметико-геометрическая будет существовать, но что это будет свойством

именно этих специальных чисел, а не таких, например, как 1 и 4,1 и т. п. Правда, догадка подсказывает нам, что высказанные сомнения неосновательны, но кто поручится за ее достоверность? История математики показывает, что догадка, интуиция зачастую обманывают. Так, например, долго полагали, что $p=2^{(2^n)}+1$ для всех целых n является простым числом, т. е. числом, не разлагающимся на целые множители. На самом деле, если $n=0, 1, 2, 3, 4$, то для p получим 3, 5, 17, 257, 65 537— и все это простые числа. Но Эйлер показал, что для $n=5$ число $p=4\,294\,259\,297$ является не простым, а составным, ибо делится на 641 без остатка[1].

Между тем Гаусс подошел вначале к поставленному вопросу грубо эмпирически. Он был исключительно прилежным и прекрасным вычислителем, что, кстати сказать, является довольно редким свойством у математиков, потому что в большинстве— это люди с очень развитым абстрактным умом, которых цифровые вычисления мало интересуют. Однако у Гаусса, крупного астронома и физика, огромная сила абстракции сочеталась с прекрасными вычислительными способностями. Он взял числа 1 и 2 и вычислил указанные ряды средних арифметических и средних геометрических до 11-го десятичного знака (в других случаях, где он пользовался подобным цифровым вычислением в качестве чернового метода, Гаусс вычислял несколько сот десятичных знаков). При этом он убедился в том, что средние сходятся все ближе и ближе друг с другом, откуда сделал эмпирическое заключение, что, повидимому, существует предел, к которому оба ряда стремятся. Тогда он эмпирически нашел закономерность, как образуется эта новая средняя. Уже после этого он вывел доказательство, что такая средняя действительно всегда существует.

Для математика, принадлежащего к первому типу, т. е. ищущего решения лишь данной узкой задачи, это было бы прекрасной находкой, которой он и ограничился бы. Но Гаусс был математиком второго типа. Он сумел от этой, казалось бы, незначительной задачи перейти к большим обобщениям, увязать ее сначала с вопросом о спрямлении дуги особой кривой— лемнискаты (восьмерки),—а затем с эллиптическими функция-

---

[1] Утверждение, что $p=2^{(2^n)}+1$ является для любых n простым числом, было выдвинуто в 1637 г. Ферма́. Но в отличие от всех других утверждений, которые этот великий французский математик выставил, не сообщив их доказательства, оно оказалось неверным. Эйлер опроверг его в 1732 г.

Для тех случаев, когда p простое число указанного вида, правильный p-угольник, как в 1796 г. показал Гаусс, может быть построен с помощью линейки и циркуля, между тем как для других (например, для $p=7$) это сделать невозможно.

ми, встречающимися при изучении колебания маятника. Так был создан новый метод и целая новая отрасль математики[1].

Можно указать множество подобных примеров, когда на первый взгляд незначительная задача становится источником большого обогащения математики, если только математик не ограничивается одними поисками конкретного результата, а устремляет свое внимание на применяемые им методы.

Математик, когда он оперирует числами или любыми символами, делает это, пользуясь определенными правилами, например: как умножить 15 на 26 или делить 275 на 15, как найти наименьшее кратное или наибольший общий делитель двух чисел, как по данной длине и ширине построить прямоугольник и т. д. и т. п. Как бы абстрактно ни рассуждал математик, он никогда не придет к конкретному результату, пока не использует какое-либо из этих многочисленных предписаний. Математик может всячески рассуждать об общих свойствах умножения, но без «рецепта», без знания того, как произвести технически перемножение одного числа на другое, он не может притти к искомому конкретному решению. Поэтому эти «рецепты», эти предписания, играя в математике как будто подчиненную, подсобную роль, на самом деле весьма существенны, ибо без них математика ничто: они ее оружие, ее инструмент. Эти вычислительные предписания называются в математике

---

[1] Гаусс вычислил для эллиптического интеграла

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi \sqrt{m^2 \cos^2\varphi + n^2 \sin^2\varphi}}$$

значение его периода

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi \sqrt{m^2 \cos^2\varphi + n^2 \sin^2\varphi}}.$$

Последний интеграл путем квадратичного преобразования

$$\sin\varphi' = (m+n)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}}$$

переходит в

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi \sqrt{m'^2\cos^2\varphi' + n'^2\sin\varphi'}}, \text{ где } m' = \frac{m+n}{2}, \; n' = \sqrt{mn}.$$

Повторяя этот процесс и переходя к пределу, получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi(\infty)}{2\pi\mu \sqrt{\cos^2\varphi(\infty) + \sin^2\varphi(\infty)}} = \frac{1}{\mu},$$

где μ есть арифметико-геометрическая средняя чисел m и n. Для лемнискаты $m^2 = 1$, $n^2 = 2$.

алгорифмами. Слово «алгорифм» произошло от искажения имени крупнейшего арабского математика Альхуаризми, жившего в начале IX в. в Хорезме и принявшего у индусов десятичную систему счисления—этот важнейший алгорифм, который затем в начале XIII в. перешел от арабов к народам Западной Европы.

Хотя алгорифмы являются лишь инструментом математики и самостоятельного существования не имеют, но в то же время возникновение отдельного алгорифма иногда может оказать решающее влияние на развитие математики.

Покажем это лишь на примере алгорифма определителей. Для этого возьмем сначала простое уравнение $ax+b=c$, которое издавна употреблялось для решения чисто торговой задачи. Имеется какой-то товар в определенном весовом количестве a, но неизвестна цена x одной единицы веса. За доставку этого товара уплачена определенная сумма, обозначенная здесь буквой b, вся выплаченная сумма обозначена буквой c, и требуется определить чистую цену этого товара.

Перед нами задача на брутто и нетто. Эти итальянские названия напоминают, что Италия, сыгравшая огромную роль в развитии торгового капитала, была родиной первого учебника уравнений начальной алгебры.

В уравнении $ax + b = c$ мы имеем одно неизвестное x, в то время как коэфициенты a, b, c—известные величины. Подобные уравнения мы называем уравнениями первой степени, или линейными уравнениями, ибо в них неизвестная величина x входит в первой степени. Такие уравнения решаются просто. Из $ax+b=c$ следует сначала, что $ax=c-b$, а отсюда, что $x = \frac{c-b}{a}$. Решение x называют корнем уравнения $ax+b=c$. Линейные уравнения могут содержать не только одно неизвестное, но и два и больше неизвестных; например $ax+by=c$ или $ax+by+cz=d$. Здесь имеются два неизвестных x и y или три неизвестных x, y, z.

Если задано уравнение $ax+by=c$, где под a, b, c мы понимаем произвольные, известные нам величины, то такого уравнения для нахождения неизвестных x и y недостаточно. Мы можем ведь избрать одно неизвестное, например y, совершенно произвольно, и тогда это уравнение примет вид уравнения с одним неизвестным. Решив его, мы найдем x, соответствующее произвольно избранному нами y. Значит, уравнение $ax + by = c$ неопределенное, так как в нем одно неизвестное может быть избрано произвольно.

Для того чтобы решения x и y получились вполне определенными, необходимо, чтобы было задано еще одно условие, например, второе уравнение $a_1x + b_1y = c_1$.

Здесь под a_1, b_1, c_1 мы опять подразумеваем какие-то заданные нам известные числа, а под x и y—неизвестные, те же, что и в первом уравнении.

Таким образом, мы получаем с и с т е м у двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$ax + by = c$$
$$a_1x + b_1y = c_1.$$

Существует несколько способов, чтобы решить эту систему уравнений. Возможен, например, такой путь. Из одного уравнения, скажем, из первого $ax+by=c$, мы выражаем одно неизвестное, например y, посредством другого неизвестного x. Вычислить y мы не можем, потому что в этом уравнении есть второе неизвестное x. Но выразить y посредством x мы можем. Сначала член ax переносим на другую сторону уравнения, куда он переходит с обратным знаком: $by=c-ax$. Потом делим обе стороны на b и получаем $y = \frac{c-ax}{b}$. Теперь неизвестное y выражено посредством неизвестного x и посредством известных a, b, c. Таким образом, первое уравнение заменено уравнением $y = \frac{c-ax}{b}$. После того как мы выразили y посредством x, мы во втором уравнении заменяем y этим выражением, подставляем вместо y выражение $\frac{c-ax}{b}$. Тогда получим уравнение:

$$a_1x + b_1 \cdot \frac{c-ax}{b} = c_1.$$

Оно содержит только одно неизвестное x—это линейное уравнение с одним неизвестным. Его легко решить по указанному выше способу, и тогда мы получим $x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}$. Если мы подставим этот результат в уравнение $y=\frac{c-ax}{b}$, то получим $y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$.

Это лишь один способ решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными; существуют и другие способы, и все они приводят, понятно, к одному и тому же результату.

Бросается в глаза, что выражения для x и y обладают какой-то симметрией, похожи друг на друга. А именно, во-первых, что оба они имеют одинаковые знаменатели ab_1-a_1b; далее, числитель в первом случае (x) получился из знаменателя, причем b и b_1 остались на своих местах, но вместо a, a_1, написано c, c_1; в другом случае (y) на своих местах остались a и a_1, а вместо b, b_1 написано c, c_1. Математики обратили внимание на это

обстоятельство и заметили дальше, что знаменатель ab_1-a_1b есть выражение, образованное определенным способом из коэфициентов обоих уравнений. Если списать эти коэфициенты и умножить их крест-накрест, взяв ab_1 с положительным знаком и a_1b с отрицательным знаком, а затем сложить оба произведения, то получится ab_1-a_1b. Это выражение, впервые примененное Лейбницем, назвали затем о п р е д е л и т е л е м и пишут его следующим символом:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1b.$$

Прибегая к этим символам, мы запишем полученные нами результаты решений данной системы уравнений так:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}.$$

Это легко запомнить, но еще важнее то, что это легко распространить на уравнения с бóльшим, чем 2, количеством неизвестных, на уравнения с 3, 4, с n, на линейные уравнения с любым количеством неизвестных. Таким образом, для решения линейных уравнений с любым количеством неизвестных был создан особый аппарат, аппарат определителей. Сначала он был не чем иным, как алгорифмом, вычислительным рецептом, который ничего нового, собственно говоря, не давал. Тот же результат, который мы получили, например, путем подстановки, мы чуть-чуть упорядочили, ввели новые обозначения и получили правило, рецепт, посредством которого можно теперь механически решать подобные уравнения.

Но алгорифм определителей (их называют еще д е т е р м и н а н т ы)—это, выражаясь образно, вызванные нами «духи», с которыми не так-то легко справиться, ибо они начинают жить самостоятельной жизнью. Отрываясь от уравнений, они начинают постепенно проникать во всю математику. Математики постепенно забывают, что определители возникли как средство для решений линейных уравнений со многими неизвестными. Сейчас любой учебник теории определителей не исходит уже из решения уравнений, а строится абстрактно, примерно таким образом: пусть дана квадратная таблица величин, имеющая n строк и n столбцов:

$$\left\|\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} & \dots & a_{nn} \end{array}\right\|.$$

Такую таблицу величин называют м а т р и ц е й.

Вместо того чтобы употреблять разные буквы a, b, c,..., употребляют одинаковые буквы, но к каждой внизу приписывают два индекса. Первый индекс обозначает строку, второй индекс обозначает столбец. Таким образом, например, a_{kr} обозначает величину, стоящую в k-й строке и в r-м столбце.

Если мы укажем теперь, как из величин этой матрицы путем сложения произведений ее элементов составляется определенная величина, то перед нами будет определитель:

$$\left|\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|.$$

В случае матрицы второго порядка $\left\|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right\|$ мы получим из нее известный нам уже определитель $\left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Численное значение определителей высших порядков установлено аналогичными предписаниями. Для практического вычисления существуют различные методы. Например, определитель третьего порядка разлагают на сумму определителей второго порядка, называемых м и н о р а м и:

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}\right| = a_1\left|\begin{array}{cc} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{array}\right| - a_2\left|\begin{array}{cc} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{array}\right| + a_3\left|\begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{array}\right|.$$

Еще более эффективен метод Кио (1853 г.), с помощью которого порядок определителя снижается на единицу. Если, например, требуется вычислить определитель

$$\Delta = \left|\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & \underline{b_3} & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array}\right|.$$

то выбираем сначала «основной» элемент, скажем, b_3, который делаем равным единице. Для этого мы выносим b_3 за определитель в виде множителя и все элементы строчки (или столбца), в котором b_3 находится, делим на b_3:

$$\Delta = b_3 \cdot \left|\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \frac{b_1}{b_3} & \frac{b_2}{b_3} & \boxed{1} & \frac{b_4}{b_3} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array}\right|.$$

Затем проводим через основной элемент крест и выкидываем все элементы, находящиеся на нем, т. е. строку номер 2 и столбец номер 3. Тогда наш определитель будет равен

$$\Delta = b_3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \left|\begin{array}{ccc} a_1 - a_3\frac{b_1}{b_3} & a_2 - a_3\frac{b_2}{b_3} & a_4 - a_3\frac{b_4}{b_3} \\ c_1 - c_3\frac{b_1}{b_3} & c_2 - c_3\frac{b_2}{b_3} & c_4 - c_3\frac{b_4}{b_3} \\ d_1 - d_3\frac{b_1}{b_3} & d_2 - d_3\frac{b_2}{b_3} & d_4 - d_3\frac{b_4}{b_3} \end{array}\right|,$$

причем, как видно, его знак будет положительным или отрицательным, в зависимости от того, будет ли четной или нечетной сумма номеров выкинутых строки и столбца. В Δ любой элемент, например c_2, уменьшен на произведение его «проекций» c_3 и $\frac{b_2}{b_3}$ на оси креста.

Установив раз навсегда известные правила вычисления значения определителя, математик делает это со скрытой целью, с тем чтобы определитель мог пригодиться ему для решения линейных уравнений. Но когда математик будет развивать теорию определителей, он не сошлется на то, что эти определители возникли из уравнений. Он начнет прямо с общего их определения, разовьет все свойства определителей, правила их сложения, умножения и т.д. Лишь под конец он покажет, что этот аппарат может пригодиться, между прочим, и для решения линейных уравнений (хотя исторически он именно отсюда возник), но он пригоден и для других целей как в геометрии, так и в алгебре и в анализе. Таким образом, в теории определителей мы имеем пример известного отрыва математического понятия от своего первоначального исторического источника.

Итак, алгорифм, вычислительный метод, имеет некоторое относительно самостоятельное развитие, и оно может в свою очередь влиять на развитие математики. Если алгорифм будет

находиться в руках математика, склонного более к решению изолированных задач, то он будет давать меньше, чем если он будет находиться в руках математика, склонного к большим обобщениям. Разумеется, направление математического мышления данного математика будет зависеть не от его индивидуальных свойств и тем более не от его расовой принадлежности (как это усиленно пропагандируют фашистские математики вроде Бибербаха), а от общего направления, в котором движется математика в данный момент под влиянием экономики и общественных условий данной конкретной эпохи. Недаром, например, математики первого, широко обобщающего направления жили в революционные периоды—в период Возрождения, промышленного переворота, буржуазной французской революции и т. д.

Начиная с XIX в. в математике преобладает обобщающее направление. Оно все больше подчиняет себе изолированные, замкнутые отрасли математики и ставит себе на службу алгорифмический метод.

Математика конца XIX в. прежде всего завершила все то, что было сделано в математике нового времени начиная с XVII в. Она подвела в доступных ей пределах некоторый логический фундамент под анализ, завершила то здание математики, построенное на формальной логике, которое начали воздвигать еще великие математики XVII в. В тех пределах, как это доступно для формальной логики—мы говорим это именно с таким ограничением, ибо сделать это абсолютно оказывается невозможным,—в общих чертах, она достроила это здание. Однако при заложении этого логического фундамента анализа математики были вынуждены построить целую новую дисциплину—теорию множеств, которая затем придала свою специфическую окраску всей современной математике. Таким образом, вместе с достройкой здания математики XVII в. в XIX в. были проделаны все подготовительные работы для постройки новых современных сооружений математики.

Математика изучает, с одной стороны, объекты, занимается операциями, которые в конечном счете рассматриваются с точки зрения п р е р ы в н о с т и, а с другой стороны, она занимается непрерывными процессами, оперирует по существу н е п р е р ы в н о с т ь ю. Конечно, лишь в крайних случаях—в чистой алгебре и в чистой топологии—оба эти аспекта выступают как крайности, и попытка разбить отдельные отрасли математики на две группы—одни, относящиеся к математике прерывного, и другие к математике непрерывного,—дала бы лишь грубо схематичные результаты.

На деле же они переплетаются, сращиваются, скрещиваются между собой, нет каких-то абсолютно строгих граней между

ними. Но с исторической перспективы, на основании достаточно глубоко идущего философского анализа ясно, что математика прерывного имеет своим источником и предметом те количественные отношения действительного мира, о которых говорит Энгельс в первой половине своего определения математики. Математика непрерывного имеет своим источником те пространственные формы действительного мира, о которых говорит Энгельс во второй половине своего определения математики. Правда, в настоящее время, несравненно больше чем в эпоху Энгельса, выявилась и осуществляется тенденция все большего слияния алгебры с геометрией, и—под этим углом зрения—пространственные формы все более явно становятся лишь частным случаем математических форм вообще.

Поэтому линия раздела математики не проходит уже между алгеброй и геометрией, но определение Энгельса получает новое содержание, истолковывается в более расширительном смысле: линия раздела проходит между математикой прерывного и математикой непрерывного.

Определение математики, данное Энгельсом, поистине гениально. Энгельс, не будучи математиком, в этой формуле предвосхитил все развитие математики. Он не говорит, что предмет математики—это изучение количественных в е л и ч и н и самого п р о с т р а н с т в а, он говорит не о в е л и ч и н а х, а о количественных о т н о ш е н и я х, не о пространстве, а о пространственных ф о р м а х. Здесь с предельной ясностью выражен сугубо абстрактный характер математики. В этой формуле вместе с тем четко отражается двойственная сущность математики как математики прерывного и математики непрерывного.

ГЛАВА ВТОРАЯ

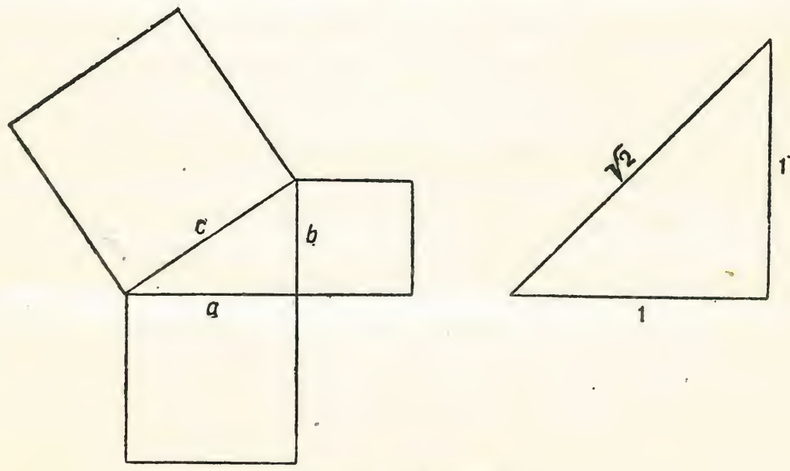
Несоизмеримость, иррациональные числа. — Скаляры, векторы, тензоры, матрицы.—Комплексные числа.—Кватернионы, сверхкомплексные числа.—Основная теорема алгебры.—Высшая алгебра.—Принцип перманентности.—Алгебраические тела.

Единственным предметом арифметики являются числа. Она строится вначале на понятии натурального ряда чисел—1, 2, 3, 4 и т. д. Объем этого ряда постепенно расширяется—сначала умели считать до 4, потом до 10, до 100, до 1000 и т. д. Позже понятие числа расширяется и качественно; к нему прибавляются новые и новые виды чисел. Благодаря операции вычитания прибавляются 0,—1,—2,—3, т. е. 0 и отрицательные числа. Вместе с натуральным рядом чисел они составляют все целые числа. Далее измерение приводит нас к понятию дроби, как-то: $^1/_2$, $^3/_4$, $-^1/_6$, $-^2/_3$ и т. д. Этот процесс возникновения новых и новых видов чисел происходит не сам по себе, а под давлением потребностей житейской практики, нуждающейся в подсчете товаров, в измерении расстояний, площадей, объемов и т. д. При этом уже простые геометрические задачи на измерение расстояний, площадей приводят к новому понятию—к несоизмеримости.

Например, пусть даны нам два отрезка разной величины. Ставится задача измерить больший отрезок посредством меньшего отрезка, т. е. установить, сколько раз меньший отрезок может уложиться в большем. Путем наложения маленького отрезка на больший мы убеждаемся, что он укладывается на большом три раза, но при этом получится какой-то остаток, меньше данного малого отрезка. Тогда мы разделим маленький

отрезок на несколько частей—на 5, 10, 17, безразлично,—и посредством этой маленькой частицы будем измерять остаток. Мы убедимся, что и этого недостаточно, что опять останется какая-то частица, которая будет еще меньше, чем та, которая была нами взята за единицу измерения. Снова продолжим этот же процесс—будем делить опять и т. д. Тогда возникает вопрос: можно ли путем такого повторного деления притти к концу? Мы спрашиваем, сумеем ли мы всегда найти такое целое число, при котором если заданный большой отрезок разделить на n частей, то эта n-я часть должна будет уложиться на заданный маленький отрезок какое-то целое количество раз. Еще древние греки пришли к убеждению, что это не всегда возможно. Если два любых отрезка заданы случайно, то они, как правило, будут несоизмеримы, и лишь в порядке исключения окажутся соизмеримыми.

Примером несоизмеримых отрезков являются сторона и диагональ квадрата. На сколько частей мы ни разделили бы сторону квадрата—на миллион, биллион, безразлично,—диагональ никогда не будет выражаться целым количеством этих долей. Это легко доказать, причем отметим, что метод данного доказательства вообще типичен для математики.



Теорема Пифагора

Условимся, что сторона квадрата равна единице. Согласно теореме Пифагора, в прямоугольном треугольнике сумма квадратов над обеими сторонами, прилегающими к прямому углу (катетами), равна квадрату той стороны, которая находится против прямого угла (гипотенузы). Две стороны квадрата и его диагональ составляют прямоугольный равнобедренный треугольник. Его катет имеет длину, равную 1, квадрат также равен 1. Второй катет будет тоже равен 1, единице будет равен

и его квадрат. Значит, полученное при сложении число $1+1=2$ и будет квадратом над гипотенузой. Отсюда следует, что длина гипотенузы будет равна $\sqrt{2}$.

Перед нами задача—доказать, что $\sqrt{2}$ нельзя выразить какой-то дробной частью от 1. Если мы разделим 1 на a частей и возьмем потом определенное количество маленьких частей, которое назовем b, то мы докажем, что $\sqrt{2}$ не может быть равен $\frac{b}{a}$, где b и a являются целыми числами, т. е. докажем, что среди всех возможных дробей нельзя найти такую дробь, которая была бы равна квадратному корню из 2.

Для того чтобы это доказать, мы будем исходить от п р о т и в н о г о, т. е. допустим, что равенство $\sqrt{2}=\frac{b}{a}$ верно.

Сначала сделаем одно упрощение, которое однако не лишит наше допущение необходимой общности. Условимся, что числа b и a не имеют общего делителя. Мы имеем право сделать так, если мы не сузим этим область чисел b и a, если не лишим наше допущение $\sqrt{2}=\frac{b}{a}$ его общности. Но мы всегда можем сказать, что если бы числа b и a имели общий делитель, то мы сократили бы на него нашу дробь $\frac{b}{a}$ и получили числа, которые уже общего делителя не имеют. Например, если $b=18$, $a=12$, можно 18 и 12, которые имеют общий делитель 6, сократить на 6 и получить $\frac{3}{2}$, причем 3 и 2 не имеют общего делителя.

Итак, предполагая, что b и a не имеют общего делителя, пишем, что $\sqrt{2}=\frac{b}{a}$. Избавляемся от дроби, умножая это равенство на a. Тогда получаем: $\sqrt{2}\cdot a=b$. Возводим это равенство в квадрат, отчего правильность равенства не нарушается. Получаем $2a^2=b^2$, что можно еще написать так: $2\cdot a\cdot a=b\cdot b$. Теперь будем рассуждать следующим образом: левая сторона представляет собой число, которое делится на 2. Значит, для того чтобы равенство было возможно, необходимо, чтобы и правая сторона делилась на 2. Тогда по меньшей мере один из обоих множителей должен делиться на 2. Итак, b должно делиться на 2.

Число b, раз оно делится на 2, должно иметь вид: 2, умноженное на какое-либо другое число, назовем его β, тогда $b=2\beta$. Теперь мы получаем равенство, в котором уже не только левая, но и правая сторона будут делиться на 2. Подставим в нашем равенстве $b=2\beta$ и получим: $2\cdot a\cdot a=2\cdot\beta\cdot 2\cdot\beta$. Сократив на 2, получим новое равенство $a\cdot a=2\cdot\beta\cdot\beta$.

Продолжаем наше рассуждение. Но сейчас у нас имеется равенство, где не левая, а правая сторона делится на 2. Для того

чтобы такое равенство могло иметь место, должна делиться на 2 и его левая сторона, значит, по крайней мере один из множителей должен тоже делиться на 2. Из этого следует, что a должно иметь вид $2\cdot\alpha$. Только при таком условии левая сторона будет делиться на 2. Но этим самым наше доказательство, собственно, закончено, ибо мы пришли к выводу, что, для того чтобы равенство $\sqrt{2}=\frac{b}{a}$ могло существовать, необходимо, чтобы b делилось на 2 и чтобы a делилось на 2, т. е. чтобы b и a имели общий делитель 2. Но ведь мы исходили из допущения, что b и a не имеют общего делителя, значит, мы пришли к формально-логическому противоречию. Отсюда следует, что наше допущение $\sqrt{2}=\frac{b}{a}$ оказывается неверным, потому что в указанных пределах арифметика не допускает формально-логических противоречий.

Формальная логика, логика застывших, неизменных, изолированных, законченных понятий—это снимок с простейших закономерностей, господствующих среди твердых тел, т. е. среди тех же объектов, на которых создана арифметика. Таким образом, господство формальной логики в арифметике объясняется общностью их материальной основы. Во всех тех случаях, где пытаются применить формальную логику к переменным объектам, к процессам изменения и развития, обнаруживается ограниченность формальной логики и невозможность с ее помощью решить соответствующие проблемы.

Ход рассуждения в приведенном выше примере исключительно прост, но вместе с тем он быстро дает необходимый эффект. Это—типичное доказательство от противного.

Таким образом, мы показали, что существуют несоизмеримые отрезки. Дальнейший шаг состоит в том, чтобы показать, что эти несоизмеримые отрезки можно мерить при помощи новых «чисел», сохраняющих все важнейшие свойства известных нам ранее чисел. Возможность существования таких чисел казалась на определенном историческом этапе познания настолько непонятной, требование расширения рамок арифметики настолько противоречащим «здравому смыслу» формальной логики, что их назвали и р р а ц и о н а л ь н ы м и, в то время как все целые и дробные числа—положительные, отрицательные и нуль—были названы р а ц и о н а л ь н ы м и числами. В этих иррациональных числах, конечно, ничего «иррационального» нет, они столь же разумны, как и обыкновенные числа.

$\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{5}$ и т. д.— все это примеры иррациональных чисел. Однако не обязательно, чтобы иррациональные числа выражались всегда корнями. Можно составить иррациональные числа, которые выражаются не корнями, а более сложными операциями.

Иррациональные числа еще больше расширили понятие числа. Конечно, иррациональные числа не сразу внедрились в математику, окончательно они были освоены только в 1888 г. Дедекиндом.

Дедекинд представлял себе совокупность всех рациональных чисел (т. е. всех дробей вида $\frac{p}{q}$, где p и q любые целые числа) как имеющуюся налицо, в готовом виде. В этой совокупности он рассматривает сечение γ, операцию, которая разбивает все рациональные числа на два класса A и B так, что любое число, принадлежащее к классу A, будет меньше любого числа, принадлежащего к классу B. Тогда может произойти лишь один из следующих случаев: 1) в классе A имеется такое число a, которое больше всех чисел, принадлежащих к классу A; 2) в классе B имеется такое число b, которое меньше всех чисел класса B,—в обоих этих случаях сечение γ определяет рациональное число; 3) в классе A не окажется наибольшего, а в классе B нет наименьшего числа. Тогда само сечение γ рассматривается как определение числа нового вида—иррационального числа γ, которое, оказывается, удовлетворяет всем основным законам рациональных чисел.

Иррациональные числа вместе с рациональными числами называют в е щ е с т в е н н ы м и, или д е й с т в и т е л ь н ы м и, числами. Хотя фактически всякое измерение проводится исключительно посредством рациональных чисел, все же, с точки зрения теории, мы не в состоянии измерять даже обыкновенные расстояния, площади, объемы без помощи иррациональных чисел. Таким образом, теория всякого рода геометрических измерений проходит в области вещественных чисел. Своеобразное взаимоотношение между теорией и практикой измерения, о котором мы здесь лишь упомянули, будет освещено в главе о практической математике.

С введением иррациональных чисел устанавливается тождество между логическим понятием вещественного числа и наглядно интуитивным представлением непрерывного отрезка, понятием и представлением, исторически существовавшими в отрыве друг от друга. Греки, создавшие понятие несоизмеримых отрезков, не поднялись к понятию иррациональных чисел.

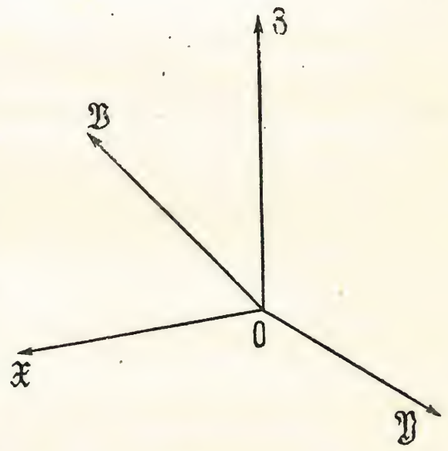
Это тождество выражается в аксиоме Кантора—Дедекинда: «каждой точке отрезка соответствует единственное вещественное число, и, обратно, каждому вещественному числу—единственная точка отрезка».

Можно было бы подумать, что, подобно тому как мы от рациональных чисел пришли к иррациональным, мы сможем получить новые, какие-то сверхиррациональные числа, применяя операцию сечения ко всей совокупности вещественных чисел.

Однако нетрудно понять, что это не так, ибо всякое сечение в совокупности вещественных чисел является сечением и в совокупности рациональных чисел.

Но и вещественных чисел недостаточно для изучения даже простейших механических процессов, а тем более для глубокого проникновения в область физики.

К примеру, такое простое понятие механики, как скорость, имеет не только в е л и ч и н у, но и н а п р а в л е н и е. Поэтому скорость не может быть задана одним вещественным числом.



Слагаемые скорости

Этого недостаточно. Для того чтобы задать какую-нибудь скорость вещественными числами, нужно ее задать тремя с л а г а е м ы м и в трех направлениях. Так, пусть в какой-либо точке пространства, скажем, в левом нижнем заднем углу комнаты, действует скорость $\mathfrak{V}$, направленная отсюда к лампе, висящей посреди комнаты. Для того чтобы эту скорость определить, недостаточно знать, что она равна, например, 10 *м* в секунду, а нужно знать еще ее направление. Его мы узнаем тогда, если будут известны слагаемые этой скорости: первое слагаемое $\mathfrak{x}$, которое пойдет в направлении нижнего ребра левой стены, второе $\mathfrak{y}$, которое пойдет в направлении нижнего ребра задней стены, и, наконец, третье слагаемое $\mathfrak{Z}$, которое пойдет в вертикальном направлении вверх. Зная эти 3 числа, мы узнаем и скорость. Но это разложение на 3 слагаемых представляет нечто искусственное. Ведь скорость тела, движущегося в направлении к лампе, не имеет никакого отношения к направлению стен данной комнаты. Сама скорость представляет нечто единое, и разложение ее на 3 слагаемых—это лишь вспомогательный прием. Математика может, конечно, вводить слагаемые скоростей, сил и других величин, которые встречаются в механике, в физике. Но этот искусственный прием вносит усложнение и тем самым некоторую неясность в уравнения, которыми пользуется математическая физика. Поэтому вполне естественно, что математики, хотя они и пользовались долгое время исключительно слагаемыми, выработали и такой прием, который берет физические величины как нечто цельное.

Если подойти к этому вопросу со стороны геометрии, то мы будем различать кроме величин, обладающих длиной, еще

и величины, обладающие направлением. Возьмем для примера отрезки a и b. Их считают равными, если они имеют одинаковую длину, независимо от того, имеют ли они одинаковые или различные направления. Такие величины (например, вес, температура и т. п.) называют скалярами. Но если мы станем принимать во внимание их направление, то равновеликими мы будем считать только те величины, которые имеют и одинаковую длину и одинаковое направление. Такие направленные величины, например, скорость, сила и т. п., называются векторами.

Но для изучения физических явлений недостаточно и векторов. Если мы возьмем какой-нибудь стержень и согнем его, то как нам выразить упругое напряжение в какой-либо точке этого стержня? Растяжение стержня будет выражаться 3 числами—одним слагаемым по продольной оси стержня и двумя слагаемыми по другим поперечным осям. Кроме того вокруг каждой оси будет происходить кручение стержня. Значит, для того чтобы охарактеризовать механическое состояние стержня в одной только точке, необходимо указать шесть чисел.

И здесь разложение на шесть таких чисел—опять нечто произвольное. Математики в новейшее время заменяют разложение упругого напряжения на таких 6 слагаемых одним целостным понятием—понятием тензора.

Квантовая механика характеризует состояние какой бы то ни было системы такими величинами, которые, если их разложить, дают бесконечное количество слагаемых. Для того чтобы записать состояние такой системы в одной ее точке, необходимо написать таблицу-матрицу, которая будет иметь бесконечное количество строчек и столбцов. Понятно, что это разложение мы в данном случае не можем провести до конца, поскольку имеем дело с бесконечным множеством. Однако разложение на слагаемые опять будет вносить что-то произвольное. Поэтому квантовая механика работает прямо со всей матрицей.

Таким образом, мы проследили восхождение от простых отрезков к векторам, которые имеют три слагаемых, к тензорам, которые даются в данном случае шестью числами (есть тензоры, которые даются бóльшим количеством чисел), и, наконец, к матрицам, которые имеют бесконечное количество строчек и столбцов.

Это пока в аспекте геометрическом. Теперь перейдем к арифметическому.

Введение в арифметику таких понятий, величин, которые оперируют с большим количеством слагаемых, приводит к дальнейшему расширению понятия числа.

Кроме вещественных чисел вводятся сначала так называемые комплексные числа. Их можно ввести в математику по-разному. Первый путь—чисто формальный. Если у нас имеется квадратное уравнение $x^2-5x+6=0$, то в данном случае его легко решить; оно имеет два корня, оба они целые числа 2 и 3.

Но возьмем другой случай: уравнение $x^2-2=0$. Здесь корни уже не рациональные, а иррациональные числа, именно $+\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$.

Как в первом, так и во втором уравнениях мы имеем дело с вещественными числами. Наконец, возьмем такое уравнение: $x^2+1=0$. Если мы захотим его решить, то убедимся, что ни одно вещественное число не может быть его корнем, потому что из этого уравнения следует, что $x=\sqrt{-1}$. На самом деле, так как всякое вещественное число, будучи возведенным в квадрат, дает положительное число или 0, то среди вещественных чисел нет такого числа, которое, будучи возведено в квадрат, будет равно -1.

Перед нами два пути: или запретить такое уравнение или расширить понятие числа. В данном случае потребности самой математики, необходимость обобщить понятие корня для любого квадратного уравнения, заставляют нас решиться на второй путь, и мы вводим $\sqrt{-1}$ как новую единицу, качественно отличную от обыкновенной. Эту единицу обозначают буквой i, так как эти числа называли раньше мнимыми—imaginaires. Второй корень будет равен $-\sqrt{-1}=-i$.

Итак, мы ввели новое понятие—мнимую единицу i, и мы можем ввести числа, которые будут иметь такой вид: ai, где a будет вещественным числом, а i будет мнимым числом. Дальше мы можем ввести еще такое число $a+bi$, где a будет вещественным числом, bi—мнимым, а $a+bi$ мы будем называть комплексным числом. С комплексными числами мы можем проделывать всевозможные операции: сложение, вычитание, умножение и деление и добиться того, чтобы все эти операции выполнялись так, как они выполняются над вещественными числами. Введение комплексных чисел обеспечивает нам возможность всегда решить любое квадратное уравнение. Результат получится или вещественный или комплексный. В более обобщенном смысле вещественные числа мы будем считать лишь частным случаем комплексных чисел.

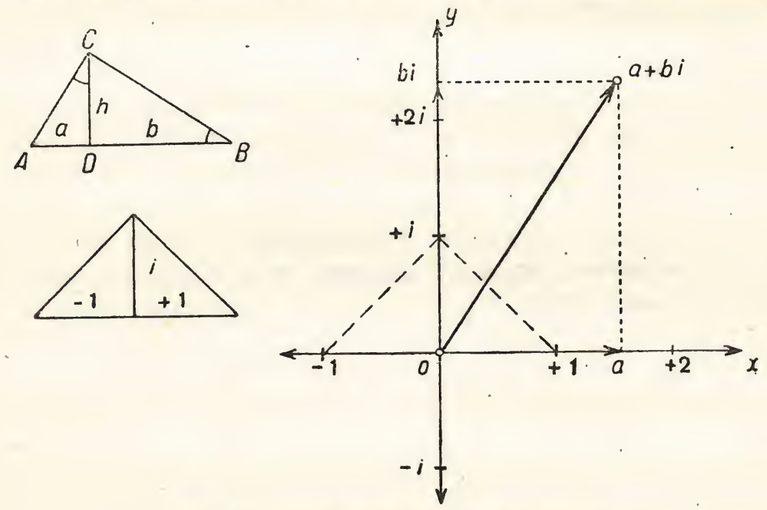
Чисто арифметический подход для введения в математику комплексных чисел состоит в том, что число $a+bi$ рассматривают как пару вещественных чисел (a, b) и устанавливают правила оперирования с подобными числовыми парами. Установление этих правил не является произвольным «соглаше-

нием» и зависит не только от требования непротиворечивости, но целиком подчиняется нуждам всей математики. Комплексные числа, равно как и все другие математические понятия, не создаются определениями, как это воображают субъективные идеалисты, а, наоборот, сами определения вытекают из математических понятий, играя роль отграничивающего выделения и обозначения. «Как географ не создает моря, когда он проводит пограничные линии и говорит: ограниченную этими линиями часть света я буду называть Желтым морем, точно так же и математик ничего, собственно, не может создать своим определением. Нельзя также простым определением приворожить вещи свойство, которого она еще не имеет, за исключением свойства называться впредь так, как ее решили называть. Но, чтобы овальная фигура, нарисованная чернилами на бумаге, могла с помощью определения получить свойство, состоящее в том, что, будучи прибавленной к единице, она опять дает единицу,—это я могу считать только научным суеверием... Лишь после того как доказано, что существует предмет, обладающий требуемым свойством, и при этом единственный, мы получаем возможность назвать его собственным именем «нуль». Создать нуль таким образом невозможно». Так метко пишет Фреге—один из виднейших исследователей основ арифметики и приверженец объективного идеализма—по поводу взглядов, защищаемых в связи с расширением понятия числа и в наши дни сторонниками различных оттенков субъективного идеализма.

Другой подход для введения в математику комплексных чисел дает нам геометрия, подход, внедренный впервые в математику Гауссом. Он основывается на следующем. Как мы видели, число i вводится так, что оно равно $\sqrt{-1}$, или, что то же самое, $\sqrt{-1 \cdot +1}$. Таким образом, мнимая единица—это средняя геометрическая между положительной и отрицательной вещественными единицами. Из геометрии известно, что если начертить прямоугольный треугольник и в нем опустить высоту h, то эта высота делит гипотенузу на два отрезка a и b, причем легко усмотреть из подобия треугольников ADC и CDB, что $a:h=h:b$.

Отсюда следует, что $h^2=ab$, т. е. что высота $h=\sqrt{ab}$ есть средняя геометрическая обоих отрезков гипотенузы. Значит, если мы начертим прямую x, на этой прямой x выберем точку O и от этой точки O будем наносить в одном направлении произвольно избранную вещественную единицу, то получим точки 1, 2, 3 и т. д. В обратном направлении —1, —2, —3 и т. д. На этой прямой будет изображен натуральный ряд чисел. Когда мы, далее, нанесем на нее все дроби, а затем и все иррациональные

числа, то, наконец, эта прямая изобразит все вещественные числа. Если же теперь мы захотим изобразить единицу мнимых чисел i, то, согласно сказанному, должны будем построить ее как среднюю геометрическую между этими двумя отрезками —1 и +1. Это мы получим, если перенесем вещественную единицу в перпендикулярном направлении y. Тогда мы получим, например, в направлении, идущем вверх, $+i$ и в обратном направлении $-i$.



Изображение комплексных чисел

На эту перпендикулярную ось y мы будем иметь тогда право наносить мнимые числа i, $2i$, $3i$, $-4i$, $-\frac{1}{2}i$, 0, $-i$, ... и т. д., т. е. это будет ось мнимых чисел. Число a будет изображаться на вещественной оси x, число bi на мнимой оси y. Если же мы захотим получить изображение числа $a+bi$, то найдем его в виде точки в плоскости на расстоянии a от мнимой и на расстоянии b от вещественной осей. Изменяя a и b произвольно, мы таким образом убедимся, что числа $a+bi$ будут заполнять всю плоскость. Вся плоскость будет изображением всех комплексных чисел.

Число $a+bi$, которое здесь изображено точкой, можно также изобразить отрезком, направленным к ней и имеющим начало в точке O. Этот отрезок будет иметь не только величину, но и направление, т. е. мы получим знакомый уже нам вектор. Таким образом, комплексное число и вектор в плоскости полностью соответствуют друг другу, или, употребляя математический термин, они изоморфны. Все правила о векторах в плоскости сохранятся и для комплексных чисел. Так, например, сложение комплексных чисел будет происходить так же, как происходит сложение векторов, т. е. по правилу параллелограмма сил или скоростей.

Всесоюзная библиотека имени В. И. Ленина

Также и умножение комплексных чисел будет происходить, как умножение векторов. Не останавливаясь на этом, укажем лишь одно важное обстоятельство. Если единицу вещественных чисел 1 помножить на i, то получится i. Это значит, что вектор, изображающий эту 1, повернется на 90°. Если эту же 1 помножить на $-i$, то вектор повернется на 90° в обратную сторону. Можно легко убедиться, что умножение любых двух комплексных чисел связано с поворотом вектора, это указывает на связь между механическим вращением в плоскости и умножением комплексных чисел.

Таким образом, мы видим, что комплексные числа (названные так Гауссом), или, как их раньше называли, мнимые числа, не содержат в себе ничего мнимого и мистического. Хотя Лейбниц еще в 1709 г. писал про эти числа: «Мнимые числа являются утонченным и чудесным прибежищем божественного духа, почти что амфибией между бытием и небытием»,—они тесно связаны с простейшим, механическим движением—вращением.

Но комплексные числа, имеющие отношение лишь к векторам в плоскости, не могли нас удовлетворить вполне, ибо физика оперирует с векторами, которые не укладываются в одну только плоскость, а имеют всевозможные направления в пространстве.

Тогда математики занялись поисками чисел, изоморфных векторам в пространстве. Такие числа были найдены в 1843 г. английским математиком Гамильтоном в виде так называемых кватернионов, т. е. чисел, имеющих четыре различные единицы. Если наши комплексные числа $a+bi$ имели обыкновенную вещественную единицу 1 и мнимую единицу i, то кватернион выглядит так: $a+bi+cj+dk$, где i, j, k—три мнимые единицы, качественно различные между собою и отличные от 1.

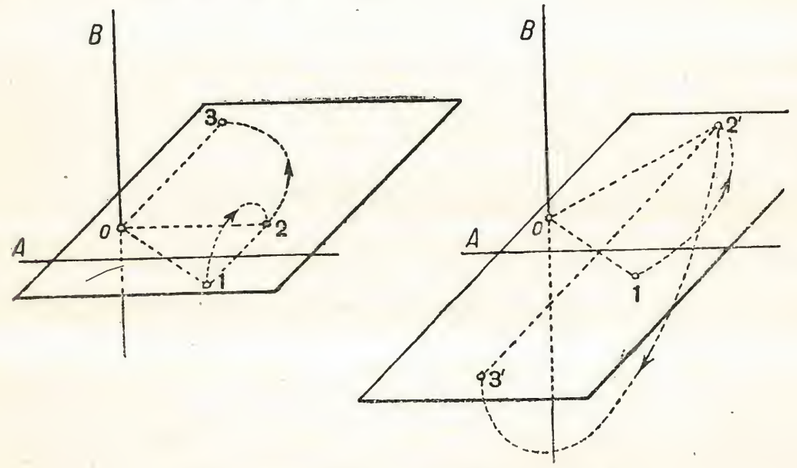
Невольно возникает вопрос, зачем понадобилось Гамильтону прибегать к 4 единицам—брать обыкновенную вещественную единицу 1 и еще целых 3 мнимых единицы, а не 2? Ведь в физике мы имеем дело с пространством, которое обладает, как известно, тремя измерениями, а не четырьмя. Действительно, Гамильтон хотел сначала построить «тернионы», числа с тремя единицами, но это ему не удалось, потому что оказалось, что этим было нарушено большинство основных законов, которые действуют для наших обыкновенных вещественных чисел. Но и для кватернионов невозможно выполнить все без исключения законы, действующие для вещественных чисел.

Впрочем, при переходе от одного вида чисел к другому вообще невозможно полное сохранение всех законов. Так, например, для обыкновенных дробей не выполняются все законы, свойственные целым числам. Так, если мы умножим 2 целых числа друг на друга, то полученное число будет больше любого из обоих сомножителей. Наоборот, умножив две правильные

дроби, например, $^1/_2$ на $^1/_3$, получим $^1/_6$, т. е. число, меньше $^1/_2$ и $^1/_3$. Если мы будем требовать, чтобы два числа a и b, умноженные друг на друга, всегда давали число, большее любого из сомножителей, то нельзя будет образовать понятия дроби.

Комплексные числа, так же как и дроби, не выполняют всех законов, действительных для вещественных чисел. Так, например, квадрат любого вещественного числа равен или нулю, или положительному числу, между тем как квадрат комплексного числа может быть отрицательным числом. Далее, вещественные числа могут быть представлены с любой точностью рациональными числами, что для комплексных чисел сделать невозможно.

Однако для кватернионов нарушается один из 11 основных законов (о которых мы будем говорить в дальнейшем), действующих для вещественных и комплексных чисел, а именно переместительный закон при умножении. Если a и b два кватерниона, то $a \cdot b$ не равно $b \cdot a$. В этом и состоит основное отличие кватернионов от комплексных чисел.



Непереместительность вращений

Эта особенность кватернионального умножения кажется с первого взгляда чем-то непривычным, но то обстоятельство, что для кватернионов $a \cdot b$ не равно $b \cdot a$, объясняется довольно просто. Дело в том, что каждый кватернион представляет собой не что иное, как вращение вокруг какой-то оси в пространстве. Но из механики известно, что если вращать тело последовательно сначала вокруг оси A, потом вокруг оси B, то результат этих двух вращений будет существенно зависеть от порядка следования этих вращений. Положение, в котором очутится тело в первом или во втором случае, не будет одним и тем же,

а окажется разным в зависимости от того, будем ли мы сначала вращать его вокруг оси A и потом вокруг оси B, или наоборот. Кватернионы как раз изоморфны с этими вращениями, т. е. все те операции, которые производятся при вращении в пространстве, точно отображаются в кватерниональном исчислении: кватернионы только снимки с этих вращений. А так как в природе вращения непереместительны, то понятно, что и умножение кватернионов не может быть переместительным. Это верно и для кватернионов, вещественная часть которых отлична от нуля и которые представляют собой вращение вокруг оси в пространстве при одновременном равномерном растяжении или сжатии масштабов. Но математики-идеалисты, вводя кватернионы исключительно формальным путем, делают вид, что «позабыли» о происхождении кватернионов из потребностей механики.

Для кватернионов основные правила будут выглядеть так: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, т. е. все три единицы i, j, k имеют квадрат, равный -1 (из чего однако не следует, что $i = j = k$, как это следовало бы по правилам алгебры вещественных или комплексных чисел). Далее

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Этих 9 правил достаточно для того, чтобы оперировать с кватернионами, если еще распространить на них все остальные законы, действующие в обыкновенной алгебре (за исключением переместительности при умножении).

Нет ничего удивительного в том, что, например, $ij=k$. Это означает, что если повернуть тело сначала вокруг одной оси x, потом вокруг второй оси y, перпендикулярной к первой, то получится тот же результат, как если бы это тело повернуть сразу вокруг третьей оси z, перпендикулярной к этим обеим осям. То, что так громоздко высказано здесь, выражено в уравнении $ij=k$.

Как продолжение идеи Гамильтона была создана целая ветвь математики—так называемые линейные алгебры. Для каждой системы таких сверхкомплексных чисел существуют своя арифметика, своя алгебра. Сейчас, в связи с развитием квантовой механики, современной физике пришлось создать другие сверхкомплексные числа, имеющие не только 4 единицы, как кватернионы, но и числа, имеющие бесконечное количество качественно отличных друг от друга единиц. С этими числами производятся разные операции, для них устанавливают определенные законы и т. д.

Однако при всем этом лишь обыкновенные комплексные числа являются основными числами, с которыми работает современная математика. Нарушение основных законов кватернионами, а тем более другими сверхкомплексными числами влечет за собой

столь большие неудобства и осложнения, что за кватернионами остается сравнительно узкое поле применений.

Аналогично обстоит дело и с другим направлением, оперирующим непосредственно с самыми геометрическими образованиями, т. е. с векторами, тензорами и т. д., о котором речь будет позже, когда мы будем говорить о развитии математического понятия пространства.

В первой половине XIX в. казалось, что оба эти направления—геометрия многомерных величин Грассманна и алгебра гиперкомплексных чисел Гамильтона и Фробениуса—составят будущее математики. Теперь же, когда была создана третья ступень абстракции, оба они заняли хотя и важное, но лишь подчиненное место.

Оба направления зачастую развивались вне связи друг с другом; существовали математические школы, которые прямо враждебно относились друг к другу. Как правило, геометры относятся недружелюбно к школе, которая оперирует сверхкомплексными числами, и наоборот. Но в то же время каждая из этих школ обогащает развитие математики. Мы убедимся в этом позже, ознакомившись с современным состоянием анализа, где имеются отделы, строящиеся аналогично тому, как строятся линейные алгебры и как строится математическое пространство.

Алгебра долгое время была наукой о решении уравнений. Наряду с линейными уравнениями (о которых речь шла выше) алгебра занималась уравнениями более высоких степеней, начиная с квадратного

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

далее, кубического

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ ,$$

потом уравнения четвертой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

и т. д.

Математики считали, что алгебра, занимающаяся линейными уравнениями, мало интересна, что настоящая алгебра—ее назвали высшей алгеброй—это та, которая изучает уравнения высоких степеней. Уравнения квадратные, а также кубическое и четвертой степени, решенные лишь в XVI в., считали элементарными. Долгое время оставался неразрешенным вопрос, возможно ли вообще решить уравнения 5-й и высших степеней, скажем, уравнение

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0.$$

Для того чтобы на этот вопрос ответить, сначала выясним, что́ означает понятие «решить» уравнение. Если написано урав-

нение $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, где числа a, b, c, d, e, f даны, то решить его значит найти такое число x_1, которое, если его подставить повсюду с левой стороны вместо x, действительно делает этот многочлен равным нулю. Но что, собственно, значит найти такое число? Если величины a, b, c, d, e, f даны конкретными числовыми значениями, то мы сможем, может быть, ощупью подобрать такое число x_1, которое с некоторой точностью будет удовлетворять нашему уравнению. Такое решение называется п р и б л и ж е н н ы м решением и для инженерной практики и практики естественника будет зачастую вполне пригодным. Но такое приближенное решение уравнения это еще не ответ на поставленный вопрос. Ведь если нам задано уравнение, где a, b, c, d, e, f не имеют конкретных значений, а являются общими алгебраическими числами, то мы хотим знать, во-первых, будет ли такое решение существовать, не приводит ли предположение о возможности такого решения к противоречию. Во-вторых, как его найти.

Мы уже убедились выше в том, что даже для квадратных уравнений не всегда можно будет найти решение среди вещественных чисел; для уравнения $x^2 + 1 = 0$ пришлось ввести новые, комплексные числа. Но даже тогда, когда мы присоединим к вещественным числам мнимые корни уравнения, мы сможем решить все уравнения лишь при том условии, что будем исходить из наличия всех вещественных чисел. Если же исходить только из наличия рациональных чисел, то решения всех алгебраических уравнений получатся лишь бесконечной последовательностью расширений числовой области.

Значительно сложнее обстоит дело с уравнениями высших степеней. В то время как уравнения 3-й степени (кубические) и 4-й степени не представляют особых трудностей, для общих уравнений 5-й и высших степеней математики долгие столетия не находили путей решения. Поэтому вполне понятно подозрение, возникшее у них, что уравнения 5-й и высших степеней в общем виде нельзя решить вещественными и комплексными числами и что для этого требуется ввести какие-то новые числа.

Однако в 1799 г. Гаусс доказал, что, для того чтобы решить алгебраическое уравнение n-й степени, не нужно изобретать какие-то новые числа—достаточны наши комплексные числа. Он доказал, что всякое алгебраическое уравнение, т. е. уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где a_0, a_1, ..., a_n есть любые комплексные числа, всегда имеет корень, причем не один, а столько корней, сколько показывает наивысший показатель при x, т. е. n корней различных или равных между собой. Каждый из этих корней есть ком-

плексное или вещественное число. Эта теорема называлась до недавнего времени о с н о в н о й т е о р е м о й а л г е б р ы.

Открыв, что всякое алгебраическое уравнение имеет n корней, Гаусс не дал способа, методов, как найти эти корни, он лишь показал, что они обязательно существуют. Этим проблема еще не была решена. И лишь в 1824 г. молодой норвежский математик Абель доказал, что корни уравнений пятой и высших степеней не могут быть, как правило, выражены посредством коэфициентов a, b, c, d,... и т. д. и применением к ним к о н е ч н о г о количества шести алгебраических операций—сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в степень и извлечения корня. Значит, когда написано уравнение 5-й степени даже в таком простом виде, как $x^5 + ax + b = 0$, то зависимость x от a и b гораздо более сложная, чем это могут выразить наши шесть операций.

Когда в каждом о т д е л ь н о м случае a и b даны как к о н к р е т н ы е числа, мы можем решить это уравнение с любой точностью, до любого знака десятичной дроби. Но написать в о б щ е й формуле зависимость между x и a, b посредством к о н е ч н о г о количества наших шести алгебраических операций невозможно. Можно ли однако вообще установить между x и a, b какую-то другую общую зависимость? Немецкий математик Клейн нашел в 1884 г. такую зависимость, правда, гораздо более сложного вида. Он установил, что для этого требуются не такие простые функции, как алгебраические, а более сложные, эллиптические, функции. Таблицы этих функций составлены; поэтому, если мы знаем формулу Клейна, мы можем найти результат с такой же точностью, как мы находим его в случае уравнений высших степеней посредством извлечения корня. Но поскольку извлечение корней считают элементарной операцией, а эллиптические функции—сложными, мы по привычке говорим, что уравнения 5-й степени не решаются. Это надо понимать так: не решаются путем сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, но решаются путем других операций, более сложных, принадлежащих уже не к алгебре, а к анализу. Это развитие алгебры ставит ее в некую зависимость от анализа. Собственно алгебре остается лишь изучать, какие уравнения 5-й и высших степеней решаются, если коэфициенты a, b, c, ... обладают определенными частными свойствами.

Эта тяжелая полоса развития алгебры усугубляется тем, что главное доказательство, на котором зиждется алгебра, доказательство, что всякое алгебраическое уравнение имеет корень, по существу стоит вне алгебры. Ведь для того чтобы эту теорему доказать, Гаусс был принужден пользоваться понятием, выходящим за пределы алгебры,—понятием непрерывности. Несмот-

ря на то что алгебра говорит о вполне определенных постоянных числах—a_0, a_1, ..., x, о прерывных величинах, Гаусс для своего доказательства изучал, как будет непрерывно изменяться величина $a_0x^n + \ldots + a_n$, если будет изменяться x, и таким образом прибегнул к методам анализа, к понятию непрерывности. Алгебру уже начали называть «алгебраическим анализом», «теорией целых и дробных функций» и тем самым шли по пути отказа от самостоятельного существования алгебры. Все как будто вело к тому, чтобы алгебра стала частью анализа. Но этого не случилось.

В 70—80-х годах прошлого века в алгебре произошел решительный перелом благодаря работам германского математика Георга Кантора. Георг Кантор создал для математики новое, мощное орудие—т е о р и ю м н о ж е с т в. Эта теория множеств, о которой мы будем говорить в дальнейшем (ибо она интересует нас особенно в связи с анализом и геометрией), оказала большое влияние на всю математику, в том числе и на алгебру Как во всей математике, так и в алгебре победила теоретико-множественная точка зрения.

Перелом в алгебре состоит в том, что она перестает заниматься поисками чисел, при помощи которых можно решить то или иное уравнение. Она начинает интересоваться самими алгебраическими о п е р а ц и я м и. Так совершается в алгебре переход на высшую ступень абстракции.

Ганкель (1867 г.) установил так называемый п р и н ц и п п е р м а н е н т н о с т и. Он подметил, что 11 законов, которые действуют в системе натуральных чисел, остаются неизменными и тогда, когда мы расширяем понятие чисел от натуральных к целым, к дробям, к вещественным, наконец, к комплексным числам, т. е. когда происходит не только количественное, но и качественное изменение содержания понятия числа.

Вот эти 11 законов:

1) $a + b = c$. Это означает, что если мы производим операцию сложения над любыми числами, то в результате получаем опять число, этот результат будет всегда содержаться в нашем запасе чисел.

2) $a \cdot b = d$. Здесь опять результатом умножения двух любых чисел будет число.

3) $(a + b) + c = a + (b + c)$. Это так называемый а с с о ц и а т и в н ы й закон для сложения.

4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, ассоциативный закон для умножения.

5) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, что выражает так называемый д и с т р и б у т и в н ы й закон.

6) $a + b = b + a$, переместительный (к о м м у т а т и в н ы й) закон для сложения.

7) $a \cdot b = b \cdot a$, переместительный закон для умножения.

8) $a + 0 = a$, что означает, что в нашей системе всегда будет существовать число, которое мы называем н у л ь и которое, если его сложить с любым числом, не меняет его величины.

9) $a \cdot 1 = a$, в этой же системе будет существовать такое число, которое мы называем е д и н и ц е й и которое, если на него умножить любое число, не меняет его величины.

10) $a + x = b$, это уравнение при любых числах a и b всегда будет иметь решение в нашей системе.

11) $a \cdot y = c$, это уравнение при любых числах a и c (за исключением случая $a = 0$) всегда будет иметь решение в нашей системе. Случай, когда $a = 0$, представляет операцию, которая в математике недопустима.

Эти 11 законов о математических операциях остаются неизменными, как бы мы ни расширяли понятие числа от натуральных до комплексных чисел. Но почему тогда мы говорим здесь о понятии числа, а не просто об элементах, объектах, зачем нам понадобилось измерительное, перечислительное содержание, понятие того, что величины a и b именно складываются или умножаются? Нельзя ли сказать проще так: имеется система, или, как говорят, множество элементов, где введены две операции. Одну будем называть попрежнему сложением, но при этом мы вовсе не будем представлять, что складываем что-то вместе, что увеличиваем какую-то величину. Другую будем называть, оставаясь при старом названии, умножением, но опять-таки мы будем отвлекаться от ее количественного содержания. Для этих операций действуют наши 11 законов. Но при этом не принимается во внимание то количественное содержание, которое было с ними связано, остаются только формальные законы, их сочетание между собой. Назовем то множество элементов, для которого действуют эти 11 законов, а л г е б р а и ч е с к и м т е л о м K. Тогда алгебра принимает совершенно новый вид, а именно: если дано алгебраическое уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{1-n}x + a_n = 0,$$

то a_0, a_1, ..., a_n есть элементы, принадлежащие какому-то алгебраическому телу K, т. е. над ними можно производить операции сложения и умножения, подчиняющиеся указанным 11 законам, причем все бесконечное множество получаемых таким образом элементов и есть тело K.

Тогда основная задача алгебры состоит не в том, чтобы решить это уравнение, чтобы отыскать числа x, ему удовлетворяющие. Теперь задача будет ставиться так: если элементы $a_0, \ldots, a_n$ принадлежат к определенному алгебраическому телу K, то будет ли элемент x, связанный с $a_0, \ldots, a_n$ посредством данного уравнения, принадлежать к алгебраическому телу K или нет? Мы вынуждены ответить, что в общем x к телу K при-

надлежать не будет, но что можно всегда построить другое алгебраическое тело L так, чтобы оно содержало $a_0, \ldots, a_n$, а значит, и все тело K, и кроме того еще все решения $x_1, \ldots, x_n$ этого уравнения. Это можно доказать, не прибегая к анализу. Таким образом, теряется значение основной теоремы алгебры Гаусса, потому что мы можем без анализа и без того, чтобы говорить о решении уравнения, доказать существование $x_1, \ldots, x_n$, которые вместе с K принадлежат к определенному алгебраическому телу L.

С алгебраическими телами можно ознакомиться на примере алгебраического тела, состоящего всего навсего из двух элементов. Если мы разобьем все целые числа на две категории—на категорию четных чисел, которую назовем A, и нечетных B, то получим два элемента A и B. Мы будем производить над ними операции сложения и умножения, подчиняя их все тем же 11 законам, что вполне возможно. Конечно, их алгебра будет выглядеть немного иначе, чем обыкновенная алгебра. Во-первых, $A + A = A$, ибо четное и четное, сложенные вместе, дают четное. Далее $A + B = B$, потому что четное плюс нечетное дают нечетное. $B + B = A$, потому что нечетное плюс нечетное дают четное.

Далее, $A \cdot A = A$, так как четное, умноженное на четное, будет равно четному. Затем, $A \cdot B = A$, ибо четное, умноженное на нечетное, дает четное. Наконец, $B \cdot B = B$, так как нечетное, умноженное на нечетное, дает нечетное.

Будут ли в этой системе существовать 0 и 1? Да, здесь A будет иметь то же значение, как и 0, а B как 1.

Можно ли будет в этой системе производить вычитание и деление? Можно, ибо $-B = B$, как это следует из $B + B = 0$. Далее, $1 : B = B$, ибо $B \cdot B = B = 1$. Единственно, чего нельзя будет произвести, это деления на A, потому что $A = 0$. Как легко убедиться, коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный законы действуют здесь. Таким образом, мы имеем здесь действительно алгебраическое тело, состоящее из двух элементов. В общем же алгебраические тела имеют бесконечное количество элементов.

Разумеется, общее понятие алгебраического тела не является праздным обобщением. Под это понятие помимо тела обычных чисел подходят и другие важные частные случаи, например тело вычетов по простому модулю, и эта новая теория дает возможность решать новые конкретные задачи.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Понятие группы. — Группы прерывные и непрерывные, конечные и бесконечные, коммутативные и некоммутативные.—Изоморфизм, инвариантность.—Геометрия метрическая, аффинная, проективная, топология.—Теория чисел.

Из потребностей самой математики выросло понятие алгебраического тела, понятие, которое вместе с тем вносит громадное обобщение в алгебру. Но еще больше обобщения не только в алгебру, но и в математику в целом вносит понятие значительно более абстрактное, чем понятие алгебраического тела—понятие г р у п п ы. И как раз поэтому понятие группы оказывается столь могущественным в решении конкретных задач.

Понятие группы и теория групп появились в математике не в результате прихоти отдельных математиков. Хотя они крайне абстрактны и в настоящее время вводятся формально-аксиоматическим путем, они возникли из нужд самой математики. Так, например, четыре условия, которым должна удовлетворять всякая группа и о которых будет речь ниже, не могут быть заменены какими-либо другими условиями не равносильными, ибо эти условия естественно получаются при рассмотрении взаимно-однозначных преобразований совокупностей. Во всех конкретных случаях нетрудно увидеть естественное происхождение группы из рассмотрения этих преобразований. А так как взаимно-однозначные преобразования играют в математике центральную роль, то вполне понятно, почему именно понятие группы является одним из основных понятий математики.

Исторически понятие группы, впервые возникшее при исследовании алгебраических уравнений, выросло из теории подстановок. Под подстановкой, например, трех объектов 1, 2, 3 понимают операцию перехода от данного расположения этих объектов к другому, например к 3, 1, 2, что записывают так:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

Если требуется сочетать две подстановки, т. е. проделать сначала одну, а затем другую, например, сперва: $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, а потом $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, то это значит, что сначала мы должны вместо 1 поставить 3 (см. первую скобку), а потом вместо 3 поставить 2 (см. вторую скобку), далее, сначала вместо 2 поставить 1, а потом вместо 1 поставить 1; наконец, вместо 3 поставить 2, а потом вместо 2 поставить 3. Результат записываем в виде «умножения»

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

Результат сочетания подстановок зависит, вообще говоря, от порядка их следования, как мы это видим и на приведенном примере, ибо

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

Перечислим теперь все мыслимые подстановки наших трех объектов. Оказывается, их будет шесть:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что эти подстановки удовлетворяют следующим условиям:

1) если сочетать любые две из них, то получим опять одну из этих шести подстановок;

2) желая выполнить любые три подряд, мы можем или сочетать результат первой и второй с третьей, или же первую с результатом второй и третьей подстановки;

3) если сочетать любую из этих подстановок с подстановкой $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, то получим данную подстановку без изменения;

4) к каждой подстановке можно подыскать ей обратную, т. е. такую, чтобы при сочетании обеих мы получили исходное расположение объектов 1, 2, 3. Так, например, подстановке $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ будет соответствовать обратная подстановка $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, ибо $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$.

Совокупность, которая, так же как и приведенная здесь система шести подстановок, удовлетворяет указанным четырем условиям, называют группой.

После этого мы покажем, как вводят понятие группы формальным путем, столь характерным для современного этапа развития математики.

Под группой мы понимаем совокупность элементов, которая удовлетворяет определенным требованиям. Эти элементы не обязательно являются числами или какими-нибудь геометрическими фигурами, а вообще чем угодно, лишь бы совокупность удовлетворяла следующим четырем условиям.

Первое условие: если A и B суть любые два элемента данной совокупности $\mathfrak{G}$, то, применяя к ним определенную операцию (ее мы будем называть г р у п п о в о й о п е р а ц и е й), мы получим однозначно новый элемент C, принадлежащий также — и это основное — к этой совокупности $\mathfrak{G}$. Групповой операцией, которую мы будем обозначать $AB=C$, могут быть и арифметическое сложение, и умножение, и деление, и более сложные математические операции, и механическое движение или еще что-либо более сложное. Не обязательно, чтобы элементы A и B в данной совокупности были разными; они могут быть и элементами тождественными, причем элемент A с элементом A тоже должны давать какой-нибудь элемент $AA=D$, принадлежащий к совокупности $\mathfrak{G}$. Таким образом, сочетаясь посредством групповой операции, два любых одинаковых или разных элемента нашей совокупности $\mathfrak{G}$ дают опять и притом однозначно элемент этой же совокупности.

Второе условие: сочетая посредством нашей групповой операции сначала два элемента, например, элемент A и элемент B, а затем с результатом этого сочетания (AB) какой-либо третий элемент C, т. е. $(AB)C$, мы должны получить такой же результат, как если бы мы элемент A сочетали с результатом (BC), полученным от сочетания элементов B и C, т. е. $(AB)C=A(BC)$. Другими словами, групповая операция удовлетворяет ассоциативному закону.

Третье условие: среди элементов, принадлежащих к данной совокупности $\mathfrak{G}$, должен существовать особый элемент (обозначим его знаком 1 и назовем групповой единицей), имеющий то свойство, что если его сочетать с любым элементом нашей совокупности, например с A, то снова получим элемент A, т. е. $A1=1A=A$.

Наконец, последнее, четвертое, условие: в нашей совокупности $\mathfrak{G}$ для любого элемента A должен существовать обратный элемент (обозначим его через $\overline{A}$), свойство которого состоит в том, что при сочетании его с A мы получаем 1, т. е. $A\overline{A}=\overline{A}A=1$.

Эти четыре весьма общих условия характеризуют групповую операцию. Если они будут соблюдены, то наша совокупность $\mathfrak{G}$ будет называться группой. Мы обращаем внимание на то, что наши условия не требуют, вообще говоря, чтобы сочетание всяких двух элементов AB обязательно было равно BA. Значит, мы не требуем от группы, чтобы она была коммутативна, и, как общее правило, группы бывают некоммутативными. Коммутативные группы (абелевы) представляют лишь особую, но весьма важную разновидность групп.

Разумеется, что исторически понятие группы возникло не сразу, а выкристаллизовалось на основании конкретных потребностей математики. Возникло оно в XVIII в., причем первым, кто начал систематически разрабатывать понятие группы, был Коши. Затем понятие группы развили виднейшие математики—Абель, Галуа, Жордан, Ли, Клейн.

Прежде чем выявить значение теории групп, приведем несколько конкретных примеров, чтобы освоиться с самим понятием группы.

Возьмем совокупность всех целых чисел: ... —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, ... Эта совокупность представляет собой группу относительно операции сложения. Если это верно, то все 4 приведенных условия должны быть соблюдены. Действительно, если мы возьмем 2 любых целых числа A и B и сложим их $A+B$, то опять получим целое число C. Значит, первое условие соблюдено. Для сложения действует ассоциативный закон $(A+B)+C=A+(B+C)$, и, значит, второе условие также соблюдается. Третье условие тоже выполнимо, ибо групповой единицей, т. е. элементом, который мы в формуле $A1=A$ обозначили через 1, у нас будет 0, потому что $0+A=A+0=A$. Наконец, мы увидим, что выполняется и четвертое условие, ибо для каждого числа A существует такое число $-A$, с которым, произведя групповую операцию $A+(-A)$, мы получим 0.

Таким образом, мы убедились, что целые числа представляют собой группу относительно операции сложения. Эта группа имеет бесконечное количество элементов. Подобные группы называются группами бесконечного порядка (количество элементов группы называется порядком этой группы). В некоторых группах бесконечного порядка можно говорить о расстоянии между элементами группы. Если расстояние конечное, как, например, в группе целых чисел относительно

сложения, то такие группы называются прерывными. Значит, приведенная группа представляет пример бесконечной прерывной группы.

В качестве второго примера возьмем совокупность всех рациональных положительных чисел (кроме нуля) и изберем групповой операцией умножение. Как легко убедиться, все 4 условия опять окажутся выполненными. Групповой единицей здесь окажется обыкновенная 1, а обратным элементом к A будет $\frac{1}{A}$. Наша совокупность опять будет бесконечной группой. Однако она существенно отличается от предыдущей группы тем, что здесь между двумя элементами группы переход не конечный, а сколь угодно малый. Если дан какой-либо элемент этой группы, например рациональное число A, и дано сколь угодно малое число ε, то мы всегда сможем найти такой элемент P этой же группы, который будет от A на меньшем расстоянии, чем заданное число ε. Подобные группы называют непрерывными. Значит, группа рациональных положительных чисел (без 0) относительно операции умножения является бесконечной непрерывной группой. Для непрерывных групп преобразования можно также ввести понятие порядка, придавая ему другое значение, чем оно имеет в прерывных группах; порядком группы здесь называют число параметров (коэфициентов) в уравнениях преобразования.

Третьим примером пусть будет совокупность всех комплексных чисел вида $a+bi$, причем групповая операция будет производиться по правилу сложения комплексных чисел. Эта совокупность образует группу, в чем легко убедиться. На самом деле, если к комплексному числу $a+bi$ прибавить другое комплексное число $c+di$, то опять получится комплексное число: $(a+c)+(b+d)i$. Ассоциативный закон, как видно, также выполняется. Групповой единицей будет число 0, ибо число 0, будучи прибавленным к любому комплексному числу, не меняет его. Наконец, каждому числу $a+bi$ соответствует его обратное $-a-bi$. При их сложении получается 0, ибо $a+bi+(-a-bi)=0$.

Таким образом, комплексные числа в отношении сложения образуют опять-таки группу, причем бесконечную непрерывную группу.

Дадим еще один пример бесконечной непрерывной группы. Представим себе в плоскости всевозможные векторы. Они образуют группу для векториального сложения, производящегося, как известно, по правилу параллелограмма. В этом легко убедиться. Результатом сложения двух векторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ снова будет вектор $\mathfrak{c}$. Ассоциативный закон тоже будет выполняться. Групповой единицей явится вектор, равный нулю. Если мы к какому-

нибудь вектору a прибавим вектор той же величины, но обратного направления $-a$, то получим 0.

Значит, все векторы плоскости относительно сложения образуют опять бесконечную непрерывную группу, непрерывную потому, что от одного вектора к другому можно перейти, проходя произвольно-малые расстояния.

Наконец, возьмем все сдвиги плоскости. Представим себе всевозможные движения плоскости, при которых она однако не выходит из своей плоскости. Эти всевозможные сдвиги в любых направлениях и любой величины опять будут представлять собой бесконечную непрерывную группу относительно операции их сложения.

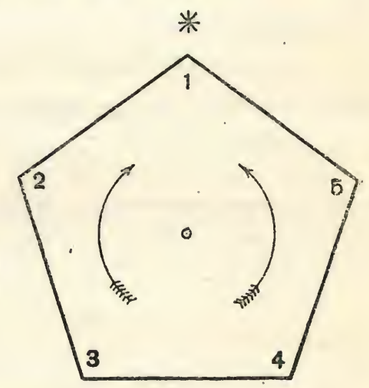
Три последних примера—группа всех комплексных чисел, группа всех векторов и группа всевозможных сдвигов плоскости—весьма тесно связаны друг с другом. Если отвлечься от содержания их элементов, то эти группы по существу тождественны. Элементы двух таких групп могут быть приведены в следующее взаимно однозначное соответствие. Если любому элементу a_1 первой группы соответствует элемент a_2 второй группы и если любому элементу b_1 первой группы соответствует элемент b_2 второй группы, то и сочетанию $a_1 b_1 = c_1$ элементов первой группы будет во второй группе соответствовать сочетание $a_2 b_2 = c_2$. Такие группы мы называем и з о м о р ф н ы м и. Понятие изоморфизма, играющее столь важную роль в современной математике, станет нам более ясным на примере конечных групп.

Для того чтобы иметь возможность привести пример конечной группы из области арифметики, вспомним одно простейшее свойство натуральных чисел.

Целые числа можно разбить на 5 классов в зависимости от того, как они делятся на 5. В нулевой класс включим все целые числа, которые делятся на 5 без остатка, т. е. числа, которые при делении на 5 дают в остатке 0. Затем первый класс, куда входят все целые числа, дающие в остатке 1. Далее второй класс—числа, которые дают в остатке 2. Потом третий класс—числа, которые дают в остатке 3. И, наконец, четвертый класс—числа, дающие в остатке 4. Этим все исчерпывается, потому что целых чисел, дающих при делении на 5 остаток 5, не существует, ибо 5 само делится на 5, и, значит, такие числа принадлежат к нулевому классу.

Каждый из 5 классов характеризуется определенным остатком. В арифметике принято эти остатки при делении на 5 называть в ы ч е т а м и, а то число, на которое производится деление, в данном случае число 5,—м о д у л е м. Значит, числа 0, 1, 2, 3, 4 представляют полную систему вычетов по модулю 5.

Здесь каждый вычет, например 2, является представителем бесконечной совокупности чисел 2, 7, 12..., которые при делении на 5 дают остаток 2. Эта полная система вычетов по модулю 5 представляет группу, если мы примем за групповую операцию сложение и нахождение остатка при делении на 5. В самом деле, если, например, одно число при делении на 5 дает в остатке 3, а другое 4, то в результате получим $3+4=7$, делим на 5, получаем в остатке 2. Или если одно число дает в остатке 2, а другое 3, то результат $2+3=5$ делим на 5 и получаем в остатке 0. В том, что здесь имеет место ассоциативный закон, также легко убедиться. Групповой единицей здесь служит нуль. Для каждого элемента имеется обратный ему элемент. Например, для элемента 4 обратным элементом будет 1; для элемента 2—элемент 3, для элемента 0—тоже 0; вообще элементы, дополняющие друг друга до 5, т. е. $4+1=5$, $2+3=5$ и т. д., будут взаимно обратными. Таким образом, мы убеждаемся, что перед нами конечная группа пятого порядка.



Вращения пятиугольника

Возьмем другой пример конечной группы из области геометрии. Представим себе правильный пятиугольник, который вращается в своей плоскости вокруг своего центра. При этом будем допускать только такие повороты, которые совмещают его опять с ним самим, т. е. если мы против одного из его углов поставим метку, то пятиугольник должен после любого поворота всегда становиться к этой метке одним из своих углов.

Будем считать состояние покоя поворотом на 0° и 2 поворота, отличающиеся друг от друга на полный угол (360°), в ту или другую сторону тождественными. Тогда система всевозможных поворотов пятиугольника будет составлять группу, если под групповой операцией понимать механическое сочетание двух последовательных поворотов.

В этом легко убедиться, причем эта группа опять окажется группой 5-го порядка. Групповой единицей будет поворот на 0°.

Третий пример конечной группы возьмем из области алгебры. Дано уравнение $z^5 = 1$. Это—уравнение 5-й степени, имеющее как мы знаем, 5 корней. Одним из этих корней является 1, потому что $1^5 = 1$. Остальные 4 корня отличны от 1, они окажутся комплексными. Так как наше уравнение $z^5 = 1$, или $z^5 - 1 = 0$, можно написать и в виде $(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$ (в чем нетрудно убедиться, произведя перемно-

жение), то ясно, что комплексные корни должны быть корнями уравнения

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Пусть ε будет один из этих корней, тогда

$$\varepsilon^5 = 1, \quad \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0.$$

Легко заметить, что другим корнем будет ε^2, ибо

$$(\varepsilon^2)^4 + (\varepsilon^2)^3 + (\varepsilon^2)^2 + (\varepsilon^2) + 1 = 0.$$

Это можно проверить, приняв во внимание, что

$$(\varepsilon^2)^4 = \varepsilon^8 = \varepsilon^5 \cdot \varepsilon^3 = \varepsilon^3, \; (\varepsilon^2)^3 = \varepsilon^6 = \varepsilon^5 \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

благодаря чему

$$(\varepsilon^2)^4 + (\varepsilon^2)^3 + (\varepsilon^2)^2 + (\varepsilon^2) + 1 = \varepsilon^3 + \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1 = 0.$$

То же самое имеет место и для ε^3, ε^4. Таким образом, отличные от 1 корни будут ε, ε^2, ε^3, ε^4.

Эти 4 корня ε, ε^2, ε^3, ε^4 составляют группу, причем группу четвертого порядка относительно возведения в степень и упрощения через $\varepsilon^5 = 1$. Так, например, мы сочетаем ε^2 и ε^4 по правилу $(\varepsilon^2)^4 = \varepsilon^8 = \varepsilon^5 \cdot \varepsilon^3 = \varepsilon^3$. Групповой единицей здесь будет ε.

Если же мы примем во внимание все корни, в том числе и корень $= 1 = \varepsilon^0$, то они образуют нам группу пятого порядка для умножения и упрощения через $\varepsilon^5 = 1$. Так, например, $\varepsilon^2\varepsilon^4 = \varepsilon^6 = \varepsilon^5\varepsilon = \varepsilon$. Последняя группа получит более глубокий смысл, когда мы вспомним, что комплексные числа изображаются векторами в комплексной плоскости и что умножение векторов приводит к поворотам этих векторов. Решить уравнение $z^5 = 1$ значит найти вектор $\vec{z}$, который при пятикратном повороте на одинаковый угол вернется опять в исходное положение, или, другими словами, вписать в окружность, имеющую радиус, равный единице, правильный пятиугольник. Таким образом, задача на построение правильного пятиугольника и задача нахождения корней пятой степени из единицы тождественны.

Группа вращений пятиугольника изоморфна с группой умножений корней пятой степени из единицы, а также изоморфна с группой вычетов по модулю пять. Эти 3 группы пятого порядка изоморфны между собой.

Уже из этих примеров видно, что понятие группы настолько обще и абстрактно, что самые разнообразные математические элементы, взятые из арифметики, алгебры, геометрии, могут быть объединены в этом общем понятии. При этом мы отказываемся от рассмотрения самой природы этих элементов, а изучаем лишь структуру группы независимо от свойств ее элементов—строим а б с т р а к т н у ю т е о р и ю г р у п п. Мы абстрагируемся от того, имеем ли мы дело с вычетами, перестановками, корнями, поворотами и т. п., и, несмотря на это,

теория групп представляет богатую по содержанию область математики.

Прежде всего математика ставит себе задачу построить, начиная с групп 1, 2, 3, 4 и т. д. порядков, группы всевозможных структур все более и более высоких порядков.

Для того чтобы показать, как строятся группы, начнем с простейших. Если в группе имеется один единственный элемент A, то он сам должен быть также и групповой единицей, т. е. $A = 1$.

Перейдем к группе, в которой имеются 2 элемента. Один из них должен быть групповой единицей 1, второй обозначим A. Если сочетать A с 1, то получим опять A, $A1 = 1A = A$. Но возможно также A сочетать с A, т. е. AA. Сочетания равных элементов между собой назовем степенями и напишем $AA = A^2$, $AAA = A^3$ и т. д. В данном случае нам надо рассмотреть две возможности: $A^2 = A$ или $A^2 = 1$. Но если бы $A^2 = A$, то в случае A, отличного от 1, для A не существовало бы обратного элемента, так как $A1 = A1$ и $AA = A1$, значит A не может быть отличным от 1. Но если $A = 1$, то в группе были бы не два элемента, а лишь один элемент. Значит, $A^2 = 1$. Таким образом, структура группы второго порядка $\mathfrak{G}_2$ будет иметь вид: 1, A, $A^2 = 1$.

Возьмем группу третьего порядка, т. е. состоящую из трех элементов: 1, A, B. Такая группа может существовать лишь в том случае, если $B = A^2$ и если $A^3 = 1$. В этом легко убедиться В самом деле, может быть, либо $A^2 = 1$, либо $A^2 = A$, либо $A^2 = B$. Но если $A^2 = 1$, то $A = 1$, и тогда группа имела бы не три элемента, а два. Если бы $A^2 = A$, то опять-таки отсюда следовало бы, что $A = 1$, и группа имела бы не три элемента, а только два. Значит, остается только $A^2 = B$, так как A^2 должно быть элементом группы. Далее, из трех возможностей $A^3 = 1$, $A^3 = A$, $A^3 = B$ последние две возможности отпадают. Значит, группа $\mathfrak{G}_3$ выглядит так: 1, A, A^2, $A^3 = 1$.

Такая группа, которая состоит только из степеней своего элемента (единицу можно считать нулевой степенью $A^0 = 1$), называется ц и к л и ч е с к о й. Но далеко не все группы являются циклическими группами. Если мы пойдем дальше, то убедимся, например, в существовании двух групп 4-го порядка различных структур: циклической и нециклической. Элементами циклической группы будут: 1, A, A^2, A^3, $A^4 = 1$; элементами нециклической группы: 1, A, B, AB, причем $AB = BA$, $A^2 = 1$, $B^2 = 1$. Количество различных типов групп увеличивается с порядком группы. Так, например, существует 15 различных типов $\mathfrak{G}_{24}$.

В теории групп преобразований громадную роль играет понятие и н в а р и а н т н о с т и. Когда перед нами группо-

вые сочетания разных элементов, дающих новые элементы, то спрашивается, какие свойства остаются при этом неизменными, инвариантными? Такая постановка вопроса приводит к весьма глубокому изучению как математических, так и физических закономерностей.

Понятия теории групп, в частности понятия инвариантности, сыграли колоссальную роль в развитии всей математики, начиная с середины прошлого века и до настоящего времени. Эти понятия проникли из математики в физику и естествознание.

Приведем простейший пример *инварианта*. Представим себе всевозможные движения плоскости самой в себе. При этом положение всех точек плоскости будет меняться, т. е. будет меняться расстояние какой-нибудь точки A от данной неподвижной прямой X, а также расстояние какой-нибудь другой точки B от той же прямой. Но расстояние точки A от точки B при всевозможных движениях плоскости, ее сдвигах и вращениях остается неизменным—оно и является инвариантом. Но мы уже знаем, что все движения плоскости самой в себе составляют группу. Значит, расстояние точки A от B, а также расстояние между двумя любыми точками плоскости есть инвариант этой группы.

Исходя из этого, в зависимости от тех или других *групп преобразования*, которые порождают те или другие инварианты, мы можем заняться классификацией геометрии, положив в основу идею *отображения* одной фигуры на другую.

Геометрия, где тождественными считаются две фигуры, у которых *расстояния и углы*, образованные двумя прямыми, одинаковы, называется *метрической* геометрией. В метрической геометрии два квадрата, имеющие одинаковую сторону, будут считаться тождественными, независимо от положения, которое они занимают. Первый квадрат можно получить из второго путем движения плоскости. Между квадратом и прямоугольником в этой геометрии будет существенная разница. Здесь же допускается еще и *подобие* фигур, т. е. отображение, равномерно увеличивающее или уменьшающее все расстояния.

Но мы можем представить себе другую геометрию, более «свободную», чем метрическая геометрия. В ней при отображениях фигур не принимается во внимание ни величина расстояний, ни величина углов, но инвариантным остается *параллелизм* прямых. Значит, такие две фигуры, как квадрат и параллелограмм, в этой геометрии будут считаться тождественными, между тем как параллелограмм и четырехугольник не будут тождественными. Здесь между кругом и эллипсом также нет никакой разницы. Такая геометрия называется *аффинной* геометрией.

Но при черчении и рисовании, при изображении трехмерных тел на плоскости, не сохраняются свойства геометрических фигур, остающиеся инвариантными в аффинной геометрии, хотя проекции, несмотря на это, вполне пригодны для

Классификация геометрии

изображения действительных предметов. Геометрия, не принимающая во внимание ни величины расстояний и углов, ни параллелизма прямых, т. е. геометрия, не различающая между той частью плоскости, которая находится перед нашими глазами, и той ее частью, которую мы себе мыслим бесконечно отдаленной, называется *проективной* геометрией. В этой геометрии не только нет разницы между кругом и эллипсом, но точно так же нет разницы между ними и параболой или ги-

перболой. Все конические сечения для такой геометрии тождественны. Положительное содержание проективной геометрии состоит в изучении инцидентности (совпадения), т. е. в том, что она различает прямые, проходящие через точку, и прямые, не проходящие через точку; прямые, которые пересекаются (безразлично на конечном или на бесконечном расстоянии), и прямые, которые нигде не пересекаются, т. е. лежат в разных плоскостях. Несмотря на то что проективная геометрия лишена понятий длины, угла, параллелизма и оперирует лишь понятием совпадения точек и прямых, она имеет весьма богатое содержание.

Но если мы захотим изучить процесс деформирования твердого тела, то и проективная геометрия стеснит нас еще своими требованиями. В последние десятилетия XIX в. и в XX в. была разработана геометрия, которая при отображениях сохраняет только одно свойство геометрических фигур, а именно их связность. Эта геометрия представляет себе все фигуры сделанными как будто из резины и поэтому не различает между двумя фигурами, которые можно превратить одну в другую посредством любой деформации, любого растяжения или сжатия, лишь бы при этом нигде не произошло разрыва и не склеились какие-нибудь две точки. Значит, например, между квадратом и кругом здесь не делается никакой разницы, так как круг можно превратить в квадрат путем указанной деформации. Точно так же нет никакой разницы, между кубом и шаром, ибо куб можно превратить в шар. Но зато, скажем, между кругом и круговым кольцом будет принципиальная разница, потому что мы не можем превратить их друг в друга, если не хотим допустить разрыва или склеивания. Точно так же между шаром и телом, называемым тором (спасательный круг, или баранка), есть принципиальная разница, потому что деформациями, не приводящими к разрыву или склеиванию, их нельзя превратить друг в друга. Геометрия, которая оставляет инвариантной лишь связность, называется топологией.

Таким образом, понятие инвариантности вносит в геометрию систематизацию, позволяет обозревать геометрию с единой точки зрения, причем всякий раз оно связано с определенной непрерывной группой. Так, метрическая геометрия трехмерного пространства связана с группой всех сдвигов и вращений, т. е. с непрерывной группой 7-го порядка $\mathfrak{G}_7$ (при преобразовании из системы x, y, z в систему x', y', z' имеют место уравнения, содержащие 7 параметров, соответствующих трем поступательным сдвигам осей, трем их вращениям и одному равномерному растяжению масштабов); аффинная геометрия с определенной непрерывной группой 12-го порядка $\mathfrak{G}_{12}$; проективная геометрия с известной непрерывной группой 15-го порядка $\mathfrak{G}_{15}$;

топология с определенной непрерывной группой бесконечного порядка $\mathfrak{G}_\infty$. Теория инвариантов каждой группы совпадает с определенным видом геометрии.

Понятие инвариантов благодаря теоретико-групповой точке зрения проникло из математики в механику, а затем и в физику.

Например, ньютоновский закон—сила равна массе, умноженной на ускорение: $F = ma$,—можно рассматривать как инвариант, остающийся неизменным относительно всех инерциональных систем отсчета.

Методы теории групп и инвариантов составляют базу теории относительности, особенно теории единого поля—этой последней, третьей, фазы теории относительности, а также базу квантовой физики. При этом цель физики видят в отыскании инвариантов по отношению к изменениям, связанным с движением системы отсчета, т. е. в исключении из физических закономерностей того, что привнесено в них экспериментатором. Значительно содействуя прогрессу физики, эти методы вместе с тем дают повод вносить в физику преувеличенную формализацию, благоприятствуя идеалистическому пониманию физики, сводящему ее лишь к разделу геометрии и математики.

Заканчивая на этом изложение вопросов алгебры, мы вкратце перечислим советских математиков, которые работают в этой области. Прежде всего Чеботаревым, работающим над теорией групп Галуа, получен ряд глубоких и блестящих результатов, в том числе им решена проблема сведения данного алгебраического уравнения n-й степени к резольвентам—уравнениям низших степеней. Частным применением этой теории является полученное им решение задачи луночек Гиппократа, состоящей в том, чтобы указать, при каких условиях площадь, ограниченную двумя круговыми дугами, можно посредством циркуля и линейки превратить в равновеликий квадрат. По теории групп О. Ю. Шмидтом и его учениками (Курошом и др.) разрабатываются вопросы классической теории; алгебраические числа изучаются Граве; Сушкевичем исследуются обобщения понятия группы; Понтрягиным получены фундаментальные результаты по теории непрерывных групп. Наконец, нужно упомянуть работы Кравчука по теории матриц и А. Н. Крылова по численному решению так называемых «вековых уравнений», которыми в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем.

Прежде чем перейти к еще более абстрактному понятию, чем понятие группы,—к понятию множества, остановимся вкратце на побочной ветви арифметики (а отчасти и алгебры)—на теории чисел.

Теория чисел—это особая ветвь математики, которая занимается изучением свойств целых чисел. Она рассматривает

каждое число, исследуя его особые индивидуальные свойства.

Теория чисел существовала еще в древности, она развивалась греками, и до настоящего времени для целочисленных решений неопределенных уравнений пользуются методом Диофанта, александрийского математика конца III в.

Любители, и даже некоторые математики, смотрят иногда на теорию чисел как на область математических развлечений, головоломок. Им кажется, что она состоит из ряда сложных и своеобразных теорем, не связанных между собой единым методом и не находящих себе практического применения. Вместе с тем интерес к теории чисел велик не только в кругах математиков, так как в ней имеется ряд проблем, простых и понятных по своей формулировке и все же до сих пор не решенных.

Одна из этих проблем пользуется особенно широкой известностью; это так называемая «великая теорема Ферма». Эта теорема, предложенная в конце XVII в. выдающимся французским математиком-любителем Ферма, гласит: если x, y, z целые числа, отличные от 0, то уравнение $x^n + y^n = z^n$ не может быть решено, если только n—целое число, и больше двух. Это утверждение, без доказательства записанное Ферма на полях экземпляра сочинений Диофанта, до сих пор, несмотря на усилия выдающихся математиков, не доказано в общем виде, однако не найден ни один пример, который бы опровергал его. Для $n = 2$ уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ имеет бесконечное количество решений, например, $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$; или $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$ и т. д.; его полное решение, дающее прямоугольные треугольники, все стороны которых суть целые числа, было известно еще индусам. Доказательство невозможности решения в целых числах уравнений $x^3 + y^3 = z^3$ и $x^4 + y^4 = z^4$ дал Эйлер. Позднее теорема была доказана для $n = 5$ и $n = 7$. Эти доказательства пользовались методом «бесконечного спуска» (применявшегося Ферма в других задачах), который состоит в следующем: доказывают, что если бы наше уравнение удовлетворялось тройкой целых чисел x_1, y_1, z_1, то оно должно было бы удовлетворяться также и другой тройкой целых чисел x_2, y_2, z_2, меньших, чем первые, а значит, и третьей тройкой x_3, y_3, z_3 чисел, еще меньших, и т. д. Отсюда (так как не может существовать б е з г р а н и ч н ы й ряд все у м е н ь ш а ю щ и х с я ц е л ы х п о л о ж и т е л ь н ы х чисел) следует, что уравнение не может иметь целых решений. В середине IX в. немецкий математик Куммер доказал «великую теорему Ферма» для всех случаев, когда n меньше 100, создав для этой цели понятие а л г е б р а и ч е с к и х ч и с е л. Но и метод Куммера не привел пока к общему доказательству, верному для всех без исключения n. Зато не уменьшилось количество неверных

«доказательств», поступающих от любителей математики, тем более что в 1906 г. в Германии была учреждена особая премия в 100 тыс. марок за доказательство или опровержение этой теоремы (благодаря инфляции эта сумма была обесценена, и премия теперь уже не существует).

Пример «великой теоремы Ферма» мы привели здесь для того, чтобы показать на ней, что в теории чисел можно зачастую, не зная математики, понять ту или другую поставленную задачу, но вместе с тем ее решение нельзя получить элементарными методами. Именно поэтому подобные задачи как раз и соблазняют дилетантов заниматься ими, искать их решения.

Не меньшие трудности связаны с проблемой п р о с т ы х ч и с е л, т. е. чисел, которые не имеют других делителей кроме самого себя и единицы. Как узнать, является ли данное число p простым или нет? «Малая теорема Ферма» учит, что если p простое число, то $a^p - a$, где a любое целое число, делится на p без остатка, однако она дает лишь н е о б х о д и м о е, а не д о с т а т о ч н о е условие, т. е. если для некоторого числа p какое-нибудь из выражений $a^p - a$ не делится на p, то p— не простое число. Такое необходимое и достаточное условие дает теорема Вильсона, согласно которой выражение $(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)) + 1$ делится на p тогда и только тогда, когда p простое число. Однако в качестве критерия она мало пригодна, поскольку при больших p вычисление этого выражения и деление на p весьма громоздко. Попытки построить выражения хотя бы для некоторых видов простых чисел оказались неудачными. Это мы уже видели[1] на выражении $2^{(2^n)} + 1$, предложенном Ферма; это относится и к выражениям вроде $p = n^2 - n + 41$, которое действительно для всех n от 1 до 40 дает для p простые числа, но для $n = 41$ получается $p = 41^2$.

Еще в 1742 г. Гольдбахом было высказано утверждение, что всякое четное число может быть написано как сумма д в у х простых чисел, но доказать эту «теорему Гольдбаха» мы до сих пор не умеем. В 1930 г. московский математик Шнирельман доказал, что всякое число может быть представлено как сумма ограниченного числа простых чисел.

Эмпирически известно, что в ряду натуральных чисел встречаются простые числа-близнецы, т. е. пары простых чисел, разность которых равна двум, как-то: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19 и т. д., причем, судя по таблицам простых чисел (они составлены до 9 миллионов!), среди больших чисел близнецы встречаются все реже и реже. Но на вопрос, существует ли их бесконечное множество, мы пока ответить не можем, хотя

[1] См. гл. I, примечание к стр. 23.

Брунс (1919 г.) доказал, что мы наталкиваемся на них все реже и реже, чем дальше продвигаемся в натуральном ряду чисел.

Равным образом все еще ждут доказательства такие эмпирические утверждения: всякое простое число есть разность двух простых чисел; между n^2 и $(n+1)^2$ при всяком целом n лежит по меньшей мере одно простое число; существует бесконечное множество простых чисел вида n^2+1; существует бесконечное множество простых чисел вида 2^n-1; существует бесконечное множество простых чисел вида $2^{(2^n)}+1$ и т. д. и т. п.

В других проблемах из области простых чисел, где доказательства были найдены, приходилось, как правило, прибегать к методам большой сложности. Так, постулат Бертрана (1845 г.), утверждающий, что для всякого $n>3$ между n и $2(n-1)$ существует по меньшей мере одно простое число, был доказан в 1852 г. Чебышевым благодаря применению сложнейших методов анализа. Бонолис (1911 г.) нашел приближенное выражение количества простых чисел между n и $^3/_2\ n$.

Все приведенные здесь задачи связаны с вопросом о том, как простые числа расположены в ряду натуральных чисел. От единицы до 100 существует 25 простых чисел, от 100 до 200 их будет 21, а между 1 671 800 и 1 671 900 мы уже не встретим ни одного простого числа. Спрашивается, ряд простых чисел беспределен или, может быть, существует какое-то наибольшее простое число? Еще Эвклид дал несложное доказательство того, что ряд простых чисел беспределен. Но по какому закону распределены простые числа среди натуральных чисел—этого мы до сих пор не знаем. Если, например, потребуют назвать тысячное простое число, то никто не сможет ответить на этот вопрос иначе, чем с помощью таблицы простых чисел, которая составлена эмпирически, по древнему методу «решета Эратосфена». Правда, если спросят, сколько существует простых чисел между 10 000 000 и 11 000 000, то на этот вопрос мы сумеем ответить. Это количество приближенно, с большой точностью, равно сложному выражению $\int_{10\,000\,000}^{11\,000\,000} \frac{dx}{\ln x}$, так называемому интеграл-логарифму. На этом примере видно, как в теорию чисел проникает высшая математика, причем первоначально для нахождения так называемых асимптотических выражений, т. е. приближенных оценок, тем более точных, чем больше количества, с которыми мы имеем дело.

Но проникновение высшей математики в теорию чисел идет значительно глубже. Великий немецкий математик Риманн показал, что вопрос о распределении простых чисел связан со свойствами сложной функции $\zeta(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\ldots$, где

$z=x+iy$, названной дзета-функцией, исследование которой представляет большие трудности.

В новейшее время высшая математика имеет особенно большие достижения в так называемой аддитивной теории чисел, изучающей разные способы разбиения чисел на слагаемые. Даже такой с виду элементарный вопрос: сколькими способами можно данное число n разбить на всевозможные слагаемые (например, число 5 разбивается 7 разными способами на слагаемые, а именно: $5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$), — представляет трудности, окончательно преодоленные лишь совсем недавно.

Еще в древности было известно, что любое целое число можно представить как сумму 4 квадратов целых чисел. Несколько доказательств этой теоремы существуют сравнительно давно, но для ее обобщения—так называемой теоремы Варинга—доказательство было найдено лишь в последние годы. Теорема Варинга гласит, что любое целое число можно представить как сумму конечного количества одинаковых степеней целых чисел, например, как 3 куба, 21 четвертых степени и т. д. Она доказана усилиями умершего молодого индусского математика Срнивас Рамануджан, затем английскими математиками Гарди и Литлвуд—благодаря применению методов теории функций комплексного переменного. Наш советский математик Виноградов дал более простое доказательство этой теоремы, он и его ученики—Сегал и другие—разрешили ряд новых аналогичных проблем.

Но имеют ли все эти вопросы какое-нибудь применение в практике? А если нет, то какой смысл заниматься ими, не являются ли они попросту головоломками?

Прежде всего нужно предостеречь тех, кто упрощенчески понимает развитие математики, полагая, что связь между математикой и практикой должна быть только непосредственной, что математика—узко утилитарная наука, работающая только для прямых нужд сегодняшнего дня. Ничего подобного. Из истории развития математики можно привести не один пример того, как математические теории создавались и развивались, опережая современную им технику и естественные науки, и были использованы лишь спустя многие столетия. Так, например, теория конических сечений—эллипса, параболы, гиперболы—была, как известно, создана и развита в совершенстве древними греками, хотя они ни эллипса, ни параболы, ни гиперболы не применяли ни в строительстве, ни в физике, ни в астрономии, считая, с точки зрения своей философии и эстетики, достойными внимания лишь круг и шар. Понадобилось почти 2000 лет, чтобы в XVI в. благодаря развитию астрономии, открытиям Коперника и Кеплера, благо-

даря открытиям механики Галилея эти теории, уже почти забытые и затем вновь извлеченные из архивов, получили не только почет и уважение, но были применены в практике. Подобных примеров в математике не мало. Поэтому, если бы даже теория чисел не давала на сегодняшний день никакой практической пользы, ее все же нельзя было бы считать пустой игрой.

На самом деле, теория чисел, во-первых, оказывает влияние на всю математику, обогащая ее своими своеобразными методами; во-вторых, различные ее теоремы находят себе применение в арифметике, алгебре и в анализе; в-третьих, в последнее время оказалось, что некоторые результаты теории чисел нашли применение в кристаллографии, в атомной физике, а также в чисто производственных задачах, относящихся к стандартизации изделий, и т. п.

Из достижений нашей советской математики в области теории чисел необходимо указать на выдающуюся работу московского математика Гельфонда, доказавшего в 1934 г. теорему, которая считалась около 30 лет неразрешимой. Суть ее в следующем. Представим себе всевозможные алгебраические уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

(где a_0, a_1, ... , a_n любые целые числа) всевозможных конечных степеней n. Представим далее, что мы знали бы все решения этих алгебраических уравнений. Таким образом, мы получили бы запас чисел, которые назовем алгебраическими числами. Спрашивается, исчерпаны ли ими все вещественные и комплексные числа или нет?

В конце прошлого века было доказано, что существуют числа, которые не могут быть корнями алгебраических уравнений с целыми коэфициентами. К этим числам относится такое число, как известное из геометрии π, выражающее отношение между периметром окружности и ее диаметром и равное 3,14159... К ним же относится, например, начало натуральных логарифмов, число Эйлера, обозначаемое e и равное 2,71828... Таких иррациональных чисел, которые не могут быть корнями алгебраических уравнений с целочисленными коэфициентами, существует бесконечное множество. Эти числа называют трансцендентными. К ним и относится решенная Гельфондом следующая задача.

Если мы возьмем любое алгебраическое число A и возведем его в иррациональную степень I, т. е. A^I, например $3^{\sqrt{2}}$, то спрашивается, получим ли мы в результате алгебраическое или трансцендентное число? Гельфонд доказал, что любое алгебраическое число, возведенное в любую иррациональную степень, дает трансцендентное число. Как видно, эта теорема выходит

уже за границы теории чисел, в ней мы встречаемся с известным обобщением теории чисел, поскольку речь идет не только о целых числах.

Первое обобщение теории чисел дал Гаусс, рассматривая числа вида $a + bi$, где a и b целые числа. С точки зрения геометрического изображения это значит, что Гаусс рассматривал целочисленные решетки, т. е. систему точек на плоскости, являющихся вершинами квадратов со сторонами, равными единице.

Таким образом, в самую теорию чисел проник геометрический метод и в дальнейшем возникла целая геометрическая теория чисел. В руках рано умершего выдающегося математика Минковского, предшественника Эйнштейна по теории относительности, геометрическая теория чисел дала ценнейшие результаты. Из советских математиков, развивающих эту теорию, необходимо указать Делоне, в работах которого установлена связь между этой отвлеченной дисциплиной и задачами практической кристаллографии.

Другое обобщение теории чисел математики получили, расширив понятие целого числа. А именно: корни уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, где a_1, a_2, ... , a_n — целые числа и где коэфициент при x равен 1, были названы алгебраическими целыми числами. Они ничуть не похожи на обыкновенные целые числа. Так, из $x^2-2 = 0$ следует, что $\sqrt{2}$ будет алгебраическим целым числом. Оказалось, что с алгебраическими целыми числами можно производить операции, похожие на операции с обыкновенными целыми числами, причем получится особое тело алгебраических целых чисел, так называемая целочисленная область. Здесь можно ставить себе задачи, аналогичные тем, которые ставятся относительно целых чисел. Например, можно спросить: существует ли среди алгебраических целых чисел такое число, как единица, и возможно ли здесь разложение на первоначальные множители? Оказывается, что под единицей следует понимать корни уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a^{n-1}x + 1 = 0$, где a_1, ... , a_{n-1}—целые числа. Оказывается, что можно говорить и о разложении на первоначальные множители, но с той разницей, что, в то время как обыкновенные целые числа (например, число 6) только одним единственным способом разлагаются на первоначальные множители $6 = 2 \cdot 3$—в области алгебраических чисел эта теорема не имеет места. Алгебраическое целое число может разлагаться на первоначальные множители несколькими способами. Так, в теле уравнения $x^2 - 2x + 6 = 0$, имеющего корни $1+\sqrt{-5}$ и $1-\sqrt{5}$, число 6 разлагается двумя способами: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}).(1 - \sqrt{-5})$, причем все множители являются здесь первоначальными. Это обстоятельство затрудняет

оперирование с алгебраическими целыми числами. Для того чтобы сохранить единственность разложения алгебраических целых чисел на множители, Куммер, занимавшийся этими числами в связи с великой теоремой Ферма, предложил в 1847 г. такой выход. К данной целочисленной области присоединяют новое число, хотя оно в этой области не содержится. Его называют идеалом. В приведенном примере таким идеалом может являться $\sqrt{2}$. Если присоединить $\sqrt{2}$ к этой целочисленной области, то убедимся, что число 6 будет разлагаться единственным способом на первоначальные множители, ибо 2 и 3 уже не будут первоначальными множителями, как видно из соотношений: $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}; 3 = \frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$.

Впрочем, в качестве идеала можно было присоединить и число i; тогда опять-таки: $2 = (1+i)\ (1-i); 3 = \frac{1+\sqrt{-5}}{1+i} \cdot \frac{1-\sqrt{-5}}{1-i}$.

На примере с идеалами мы снова встретились с таким случаем, когда математика к определенной совокупности понятий, с которыми она оперирует, вынуждена, для того чтобы сохранить общность операций, присоединить новые объекты, первоначально не входившие в эту совокупность, так называемые идеальные элементы. Введение нуля, отрицательных, дробных комплексных чисел представляет пример такого присоединения. В проективной геометрии мы встретим еще один пример того же рода.

Двигаясь дальше по линии восходящего обобщения, мы подходим к теории множеств.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

Бесконечность в математике.—Закон полной математической индукции.—Парадоксы бесконечного.—Понятие множества, классификация множеств, операции над множествами.—Трансфинитные числа.—Парадоксы теории множеств.—Точечные множества.

Когда математики сделали серьезную попытку преодолеть затруднения и противоречия, вызванные в математике понятием бесконечности,—они создали теорию множеств.

С понятием бесконечности математика встречается с самого начала своего зарождения. Без оперирования с бесконечными последовательностями в арифметике и в алгебре, с бесконечными пространственными формами в геометрии математика не была бы вообще наукой. Диалектический материализм учит, что знание становится наукой лишь тогда, когда оно выходит за пределы конечного. Особенно это относится к математике. Об этом говорит Энгельс, а Ленин в своих философских тетрадях подчеркивает это по отношению ко всем наукам.

Если бы, например, законы арифметики касались только конечного, хотя бы и очень большого количества натуральных чисел, она не была бы еще наукой. Наукой арифметика становится лишь тогда, когда она опирается на следующее рассуждение: пусть какое-нибудь арифметическое правило верно для 1, и пусть нам удается доказать, что если бы оно было верно для числа n, то оно оставалось бы верным и для числа $n+1$ (где под числом n подразумевается любое натуральное число), тогда этим доказано, что оно действительно верно для всех n. Но поскольку под «все n» надо подразумевать любое натуральное число, то тем самым уже завершен переход к бесконеч-

ности в ее потенциальном понимании, т. е. как некоторого становления.

Этот переход от n к $n+1$ играет существенную роль во всей математике; его называют законом полной математической индукции. Методами формальной логики закон математической индукции не может быть доказан, его (или какой-нибудь эквивалентный ему закон или определение) приходится принимать без доказательства, как аксиому. Хотя математики долго не подозревали, что они пользуются этим законом, все же понятно, что без этого закона арифметика, а с нею и вся математика как наука существовать бы не могла. Вообще математики часто оперируют понятием бесконечности, даже не говоря об этом. Это чаще всего имеет место при употреблении слов «все», «каждый», например: «все числа», «каждая точка отрезка» и т. д.

До середины XIX в. математики употребляли как косвенно, так и прямо понятие бесконечности, но, наталкиваясь на логические противоречия, обходили их путем разного рода оговорок. Всем известны парадоксы Зенона и вообще софистов. Из них к области математики относится известный парадокс, отрицающий возможность движения стрелы, а также парадокс, утверждающий, будто Ахиллес никогда не догонит черепаху. Эти парадоксы в математическом отношении представляют интерес, потому что показывают, к каким трудностям мы приходим, когда пользуемся бесконечными последовательностями или бесконечными рядами, т. е. рядами, которые имеют бесконечное число членов и, несмотря на это, дают конечную сумму.

Аристотель, который первый дал правильное научное объяснение парадокса Зенона, высказался против актуальной бесконечности, т. е. против понимания бесконечности как завершенного процесса, и за понимание бесконечности как становления или, говоря на нашем, современном научном языке, Аристотель стал в основном на точку зрения диалектического понимания бесконечности в математике, понимания бесконечности как единства становления и результата этого процесса.

Однако длинный ряд затруднений, связанных с понятием бесконечности, появляется в математике гораздо позже.

Противоречия арифметического порядка могут быть разбиты на три рода: первый род противоречий возникает из распространения на выражения, имеющие бесконечное количество членов, т. е. на бесконечные суммы, произведения, дроби и т. п., правил, которые действительны для выражений с конечным количеством членов. Представим себе, что перед нами бесконечная сумма, например $1-1+1-1+1\ldots$ Спрашивается, чему она равна?

Легко убедиться, что, оперируя правилами, верными для конечного числа слагаемых, мы придем здесь к противоречию. В самом деле, если мы применим верный для суммы с конечным числом членов ассоциативный закон и представим нашу сумму в виде $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$, то, так как каждое отдельное выражение в скобках равно 0,—и вся сумма будет равна 0.

Но можно поступить и иначе, а именно: если мы напишем нашу сумму таким образом: $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$, то, так как каждое выражение в скобках равно 0,—и вся сумма будет равна 1.

Третий результат мы получим, применив к этой сумме с бесконечным количеством слагаемых переместительный закон, верный для сумм с конечным количеством членов. Переставляя попарно слагаемые, мы можем написать нашу сумму так: $-1+1-1+1-\ldots$, после чего объединим слагаемые попарно, начиная со второй единицы: $-1+(1-1)+(1-1)+\ldots$, отсюда приходим к выводу, что наша сумма равна—1.

Наконец, мы можем получить еще четвертый, отличный от предыдущих, результат. Пишем нашу сумму, величина которой x неизвестна, так: $x=1-(1+1-1+-\ldots)$. Тогда выражение в скобках на правой стороне будет как раз равно x, т. е. $x=1-x$, откуда следует, что $2x=1$, или $x=\frac{1}{2}$.

Таким образом, незаконно применяя здесь правила, верные для сложения с конечным количеством слагаемых, к сумме с бесконечным количеством слагаемых, мы пришли к явно нелепому выводу, что одно и то же выражение имеет четыре разных значения. Можно показать, что сумма $1-1+1-1+\ldots$ может принимать вообще какие угодно значения. Математики долгое время спорили о том, какое из этих значений правильно. Однако для нас ясно, что все они неправильны, что выражение $1-1+1-1+\ldots$ просто не имеет никакого смысла. Ведь кроме идеалистического предрассудка нет никакого основания полагать, что любой набор математических знаков должен обязательно иметь какой-то смысл. Более того, бессмысленное в одних условиях выражение может приобрести смысл в других, и наоборот. Так, в частности к ряду $1-1+1-1+\ldots$ можно однозначно отнести число $\frac{1}{2}$, если суммой ряда считать предел $\lim \frac{S_0+S_1+\ldots+S_n}{n+1}$, где S_n означает сумму n членов ряда.

Второго рода противоречия встречаются при распространении правил, верных для конечных величин, на величины бесконечные, хотя бы и взятые в конечном количестве. Так, на-

пример, для конечных величин a, b, c, при $a \neq 0$, из $ab = ac$ следует, что $b = c$. Однако, хотя несомненно верно, что $1 \cdot \infty = 2 \cdot \infty$, все же, применяя указанное правило, мы получим отсюда неверный вывод, что $1 = 2$. Эта явная нелепость получилась потому, что мы незаконно применили к бесконечным величинам правило, верное для конечных величин.

К противоречиям третьего рода относится следующий интересный пример, образно изложенный Галилеем (1638 г.) в его книге «Беседы и математические доказательства, относящиеся к механике по местному движению», в следующем диалоге:

«*Сальвиати.* Сказанное нами относится к числу затруднений, происходящих вследствие того, что, рассуждая нашим ограниченным разумом о бесконечном, мы приписываем последнему свойства, известные нам по вещам конечным и ограниченным. Между тем это неправильно, так как такие свойства, как большая или меньшая величина и равенство, неприменимы к бесконечному, относительно которого нельзя сказать, что одна бесконечность больше или меньше другой или равна ей. В подтверждение этого положения мне пришел в голову пример, который я для большей ясности изложу в форме вопросов, обращенных к сеньору Симпличио, указавшему на затруднения.

Я полагаю, что вы прекрасно знаете, какие числа являются квадратами и какие нет.

Симпличио. Я прекрасно знаю, что квадратами являются такие числа, которые получаются от умножения какого-либо числа на самого себя; таким образом, числа четыре, девять и т. д. суть квадраты, так как они получаются от умножения двух и соответственно трех на самих себя.

Сальвиати. Великолепно. Вы знаете, конечно, и то, что как произведения чисел называются квадратами, так и образующие их, т. е. перемноженные числа носят название сторон или корней; другие числа, не являющиеся произведением двух равных множителей, не суть квадраты. Теперь, если я скажу, что количество всех чисел вместе—квадратов и неквадратов—больше, нежели одних только квадратов, то такое утверждение будет правильным; не так ли?

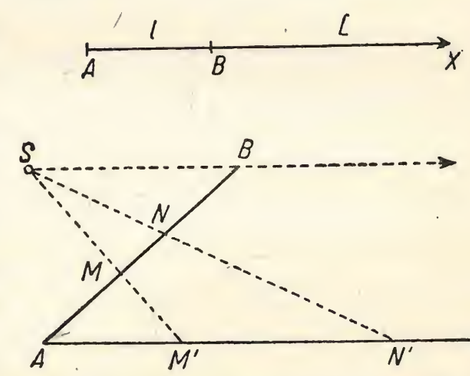
Симпличио. Ничего не могу возразить против этого.

Сальвиати. Если я теперь спрошу вас, каково число квадратов, то можно по справедливости ответить, что их столько же числом, сколько существует корней, так как каждый квадрат имеет свой корень и каждый корень свой квадрат; ни один квадрат не может иметь более одного корня[1], и ни один корень более одного квадрата.

[1] Здесь, как и во всей этой беседе, под числами надо понимать положительные целые числа.

Симпличио. Совершенно верно.

Сальвиати. Но если я спрошу далее, каково число корней, то вы не станете отрицать, что оно равно количеству всех чисел вообще, потому что нет ни одного числа, которое не могло бы быть корнем какого-либо квадрата; установив это, приходится сказать, что число квадратов равняется общему количеству всех чисел, так как именно таково количество корней, каковыми являются все числа. А между тем ранее мы сказали, что общее количество всех чисел превышает число квадратов, так как большая часть их не является квадратами. Действительно, числа квадратов непрерывно и в весьма большой пропорции убывают по мере того, как мы переходим к большим числам; так, из чисел до ста квадратами являются десять, т. е. одна десятая часть; до десяти тысяч квадратами будет лишь одна сотая часть; до одного миллиона—только одна тысячная часть. А в отношении числа бесконечно большого, если бы только мы могли объять его, мы должны были бы сказать, что квадратов столько же, сколько всех чисел.



Геометрические парадоксы

Сагредо. Что же нужно сделать, чтобы найти выход из такого положения?

Сальвиати. Я не вижу возможности никакого другого решения, как признать, что бесконечно количество чисел вообще, бесконечно число квадратов, бесконечно и число корней. Нельзя сказать, что число квадратов меньше количества всех чисел, а последнее больше: в конечном выводе — свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где дело идет о бесконечности, и применимы только к конечным количествам».

К таким парадоксам мы приходим даже в элементарной арифметике. Это происходит оттого, что нельзя с бесконечными величинами оперировать посредством тех же правил, которыми мы оперируем с конечными величинами.

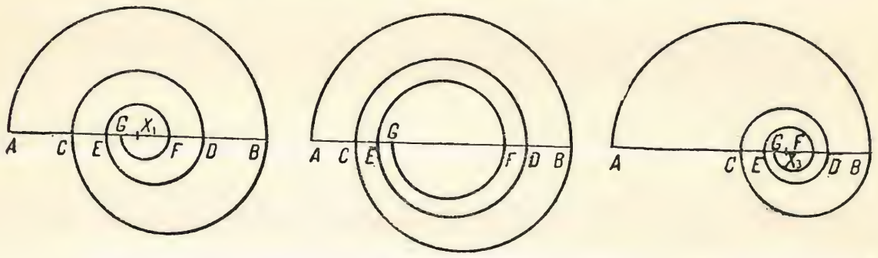
В геометрии понятие бесконечности приводит к парадоксам с еще большей наглядностью.

Возьмем для примера на прямой $\overline{AX}$ отрезок $\overline{AB}$ и луч $\overline{BX}$, простирающийся до бесконечности. Ясно, что луч $\overline{AX}$ больше, чем луч $\overline{BX}$. Очевидно, что если мы к лучу $\overline{BX}$ прибавим отрезок $\overline{AB}$, то луч $\overline{BX}$ увеличится как раз на отрезок $\overline{AB}$. Ве-

личина луча $\overline{BX}$ не изменится, если мы его только переместим из одного положения в другое. Но достаточно лишь сдвинуть луч $\overline{BX}$ на отрезок $\overline{AB}$ влево, чтобы лучи $\overline{AX}$ и $\overline{BX}$ совпали между собою. Таким образом, если длину нашего отрезка $\overline{AB}$ мы назовем l и бесконечную длину луча $\overline{BX}$ назовем L, то отсюда следует, что $l + L = L$. Однако отрезок l не равен 0, наоборот, он может оказаться равным расстоянию Москва — Ленинград или, скажем, расстоянию от Земли до Солнца.

Другой пример: бесконечный луч $\overline{AX}$ и конечный отрезок $\overline{AB}$ содержат одинаковое количество точек (за исключением одной единственной точки), как наглядно видно из того, что, соединяя любую точку M отрезка $\overline{AB}$ с точкой S, мы находим на пересечении $\overline{SM}$ с лучом $\overline{AX}$ единственную точку M', ей соответствующую, и, обратно, любой точке N' на луче $\overline{AX}$ будет соответствовать одна и только одна точка N на отрезке $\overline{AB}$.

В геометрии в связи с проблемой бесконечности встречаются и другие поразительные противоречия, показывающие в то же время, что невозможно овладеть геометрией, основываясь на одних только наглядных представлениях.



Три спирали

В качестве примера рассмотрим три спирали, составленные из полуокружностей и образующие каждая бесконечное количество витков, по следующим законам:

I спираль: $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = \frac{3}{4}$, $\overline{CD} = \frac{1}{2}$,

$\overline{DE} = \frac{3}{8}$, $\overline{EF} = \frac{1}{4}$, $\overline{FG} = \frac{3}{16}$, ...

II спираль: $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = \frac{5}{6}$, $\overline{CD} = \frac{2}{3}$,

$\overline{DE} = \frac{7}{12}$, $\overline{EF} = \frac{1}{2}$, $\overline{FG} = \frac{11}{24}$, ...

III спираль: $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = \frac{1}{2}$, $\overline{CD} = \frac{1}{3}$,

$\overline{DE} = \frac{1}{4}$, $\overline{EF} = \frac{1}{5}$, $\overline{FG} = \frac{1}{6}$, ...

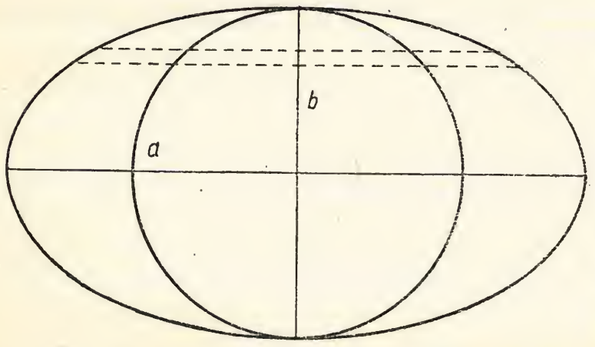
I спираль имеет конечную длину, равную $\frac{7}{4}\pi = 5{,}49...$ Длина же II и III спиралей (так же, как и I спираль, умещающихся на конечной площади) бесконечна. В то время как II спираль не имеет предельной точки, I спираль, обладающая конечной длиной, и даже бесконечная III спираль имеют предельные точки, причем в первом случае эта точка лежит на расстоянии $\overline{AX}_1 = \frac{1}{2}$, в последнем—на расстоянии $\overline{AX}_3 = \ln 2 = 0{,}694...$

Вообще можно заметить, что односвязные линии (т. е. линии, не имеющие никаких разветвлений), простирающиеся до бесконечности, всегда бесконечны, между тем как односвязные поверхности или односвязные тела, простирающиеся до бесконечности, могут быть или бесконечными, или конечными. Наоборот, односвязная линия в ограниченной части поверхности или односвязная поверхность в ограниченной части пространства могут быть или конечными, или бесконечными, между тем как односвязные тела в ограниченной части пространства всегда конечны.

Подобного рода парадоксы и неожиданности должны были, конечно, рано или поздно натолкнуть на постановку вопроса о законности употребления понятия бесконечности в математике и о тех предосторожностях, которые необходимо применять при оперировании с ним. Это было тем более необходимо потому, что математики с конца XVI и в начале XVII в., а особенно позднее, в период бурного развития диференциального и интегрального исчислений, стали слишком широко и неосторожно пользоваться бесконечными разложениями—рядами, произведениями, дробями, причем даже такие гениальные математики, как Эйлер, благодаря этому иногда приходили к неправильным результатам.

Так, предшественником диференциального и интегрального исчислений, которые употребляют понятие бесконечности в широком объеме, было так называемое «исчисление неделимых», созданное Кеплером, Галилеем и особенно развитое Кавальери. Они, например, рассматривали площадь как состоящую из бесконечно большого количества бесконечно-малых частей, представляя при этом эти бесконечно-малые части не как беспредельно убывающие, с т а н о в я щ и е с я бесконечно-малые, а как г о т о в ы е, актуально бесконечно-малые. Так, чтобы вычислить площадь эллипса, они рассматривали ее как состоящую из бесконечного количества бесконечно-малых отрезков, не имеющих

никакой ширины, имеющих только длину. Они рассуждали так: если взять круг и вписать его в эллипс, имеющий полуоси, равные a и b, то радиус этого круга будет равен b, а площадь его известна—она будет равна πb^2. Но так как каждый из бесконечно-малых отрезков, которые составляют площадь эллипса, больше в пропорции $a : b$, чем соответствующий ему отрезок из отрезков, составляющих площадь круга, то площадь эллипса равна $\pi b^2 \cdot \frac{a}{b} = \pi ab$. Этот результат действительно правилен. Но, применив тот же метод к вычислению длины периметра эллипса, который они представляли себе состоящим из отдельных точек, они нашли, что так как длина окружности круга равна $\pi(b+b)$, то длина периметра эллипса равна $\pi(a+b)$, что неправильно.



Площади круга и эллипса

Трудности с бесконечностью значительно углубились, когда развились дифференциальное и интегральное исчисления, оперирующие с переменными величинами. Это величины, которые, изменяясь, могут убывая приближаться как угодно близко к нулю (б е с к о н е ч н о м а л ы е) или же возрастая становиться больше, чем любое заданное сколь бы ни было большое число (б е с к о н е ч н о б о л ь ш и е).

Первым, пожалуй, кто обратил внимание на эти трудности и попытался строго обосновать применение бесконечных величин в математике, был Коши (1769—1857). Он создал т е о р и ю п р е д е л о в, основанную на понятии переменной величины, указав правила, по которым можно употреблять переменные величины в математике наравне с величинами постоянными.

Но постепенно выяснилось, что и теория пределов Коши также не была свободна от противоречий. В 1848 г. пражский профессор теологии Больцано, почерпнувший у схоластов не только свои философские взгляды, но и кропотливый логический анализ, применив его в данном случае не к бессмысленным религиозным софизмам, а к математическим понятиям, написал книгу «Парадоксы бесконечности». Эта книга и явилась предшественницей теории множеств, которая составляет в настоящее время ось всей современной математики. Взгляды Боль-

цано были начиная с 1861 г. в более строгом виде значительно развиты Георгом Кантором, создавшим теорию множеств.

Понятие м н о ж е с т в а, введенное Кантором, состоит в том, что под множеством $\mathfrak{M}$ мы понимаем какую угодно (безразлично, конечную или бесконечную) совокупность элементов, причем дается единственное условие, а именно, что можно по указанным признакам определить, принадлежит ли какой-нибудь элемент к нашему множеству или нет. Как видно, множество—понятие чрезвычайно общее, и именно этим оно отличается от понятия группы, где мы требовали, чтобы выполнялись 4 закона групповой операции. Здесь мы не требуем этого, нам также безразлично, какова природа элементов множества. Все стулья в данной аудитории составляют множество, все черные кошки составляют множество, и все идеи тоже составляют множество.

Говоря о множестве, мы не принимаем во внимание порядок элементов, входящих в это множество. Два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, которые имеют одни и те же элементы, мы называем р а в н ы м и между собой и пишем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$. Множество может объединять самые разнообразные объекты, причем должно быть лишь указано, ч т о́ к данному множеству принадлежит. Уже это обстоятельство показывает, что множество мы представляем себе как нечто, о чем можно рассуждать по законам формальной логики. Или оно готово и построено, или, по меньшей мере, дан неизменный закон, по которому образуются его элементы, и, значит, мы всегда имеем возможность распознать, является ли данный объект элементом множества или нет.

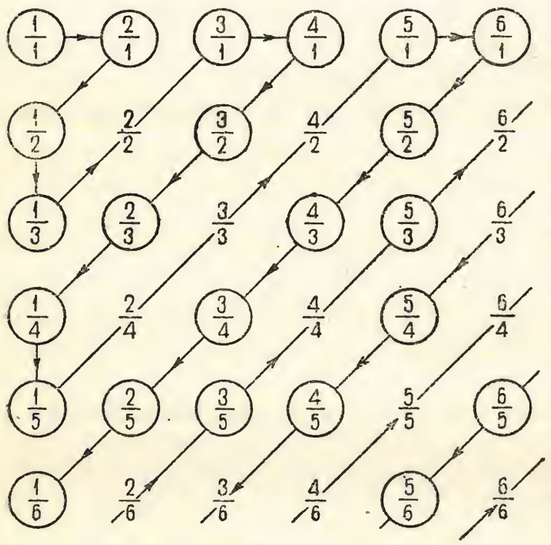
Освоившись с понятием множества, достаточно простым и в то же самое время чрезвычайно общим, мы можем перейти к вопросу о к л а с с и ф и к а ц и и множеств.

Прежде всего выделим к о н е ч н ы е множества, т. е. множества, имеющие конечное количество элементов. Скажем, количество стульев в аудитории или количество всех целых чисел от 1 до 20 будут конечными множествами.

Другим видом множеств являются б е с к о н е ч н ы е множества. Основное содержание гениальной работы Кантора заключается, вкратце, в том, что он добился дальнейшей классификации бесконечных множеств и тем самым крайне тонко подошел к вопросу о математической бесконечности. Перейдем к этой классификации бесконечных множеств.

Наиболее простое бесконечное множество—это множество чисел натурального ряда: 1, 2, 3, 4, 5, 6..., которое мы будем обозначать $\mathfrak{A}\{1, 2, 3, \ldots\}$. Это множество мы называем с ч е т н ы м, или и с ч и с л и м ы м, множеством. Любое другое множество, например $\mathfrak{M}\{a, b, c, \ldots\}$, будет только тогда счетным множеством, если мы сумеем пронумеровать его. Этого мы добьемся, если будет

существовать правило, согласно которому любому элементу множества $\mathfrak{M}$ будет соответствовать одно вполне определенное число множества $\mathfrak{A}$, и наоборот. Тогда мы сможем единственным способом перенумеровать все элементы множества $\mathfrak{N}$. Такие два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, элементы которых могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие, т. е. в такое соответствие друг с другом, когда любому элементу множества $\mathfrak{M}$ соответствует один и только один элемент множества $\mathfrak{N}$ и любому элементу множества $\mathfrak{N}$ соответствует один и только один элемент множества $\mathfrak{M}$, называются эквивалентными множествами, что пишется: $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$.



Счетное множество положительных рациональных чисел

Понятие эквивалентности не зависит ни от понятия количественного, ни от понятия порядкового числа. Мы можем установить, что два множества — например, множество стульев данной аудитории и множество слушателей—эквивалентны, для чего не требуется считать их, а достаточно установить лишь взаимно-однозначное соответствие между ними.

Всякое счетное множество мы сможем пронумеровать, оно будет эквивалентно множеству натуральных чисел.

Спрашивается, какие бесконечные множества являются счетными и существуют ли какие-либо бесконечные множества, которые не являются счетными?

Прежде всего рассмотрим множество всех рациональных чисел, т. е. всех целых чисел и дробей. Это множество, как доказал Кантор, является счетным множеством.

Для того чтобы это доказать, составим таблицу всех положительных рациональных чисел и затем попытаемся их пронумеровать. В первой строке напишем все положительные целые числа:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ \ldots,$$

рассматривая их как дроби со знаменателем, равным 1. Во второй строке напишем все дроби со знаменателем 2, это будут:

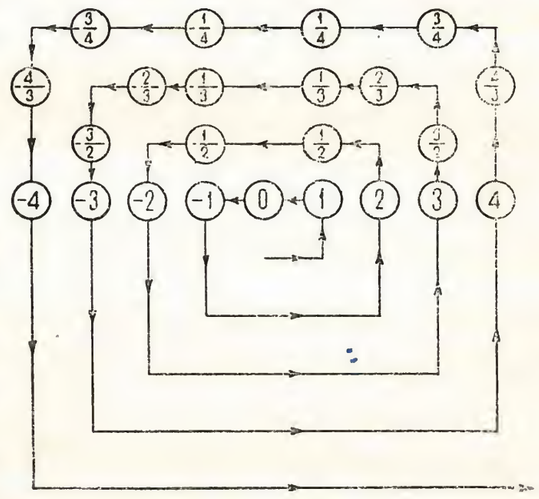
$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{2},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{4}{2},\quad \frac{5}{2},\ \ldots$$

В третьей строке будут:

$$\frac{1}{3},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{3},\quad \frac{4}{3},\quad \frac{5}{3},\ \ldots$$

и т. д.

Эта таблица, содержащая все рациональные положительные числа, будет иметь бесконечное количество строк и бесконечное количество столбцов. Числа этой таблицы можно пронумеровать, проходя ее следующим зигзагообразным путем: от 1 движемся к 2, от 2 к $\frac{1}{2}$, отсюда к $\frac{1}{3}$, от $\frac{1}{3}$ к $\frac{2}{2}$, далее к 3, отсюда к 4 и т. д. Идя по этой ломаной линии, мы будем каждый элемент отмечать номером 1, 2, 3, 4, и т. д., пропуская при этом те элементы, где дробь сокращается и повторяет один из предыдущих элементов, как, например, в случае $\frac{2}{2} = 1$. Таким образом, все рациональные положительные числа удается занумеровать, значит, они составляют счетное множество.



Счетное множество всех рациональных чисел

То же можно показать еще и другим способом, составив таблицу всех рациональных чисел (включив и отрицательные) и пронумеровав их, двигаясь по своеобразной спирали.

Кантор показал, что не только рациональные числа, но и более мощный класс чисел—все алгебраические числа—составляет счетное множество. Как нам уже известно, алгебраические числа—это числа, которые являются корнями всевозможных уравнений вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где a_n, a_{n-1}, $\ldots$ a_1, a_0 суть целые числа. Чтобы пронумеровать эти всевозможные корни всевозможных уравнений, распределим сначала все уравнения по их «высоте»:

$$h = n + |a_n| + \ldots + |a_0|^{1}$$

[1] Здесь $|a|$ обозначает так называемое абсолютное значение коэфициента a: это коэфициент a, взятый с положительным знаком, невзирая на то, снабжен ли он в уравнении положительным или отрицательным знаком.

и тогда убедимся, что одной и той же высоте h будет принадлежать лишь к о н е ч н о е множество алгебраических чисел, которые таким путем смогут быть пронумерованы. Отсюда мы получим таблицу:

Высота	Корни
$h = 2$	0
3	$-1,\ +1$
4	$-2,\ -\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2},\ +2$
5	$-3,\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5},\ -\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2},\ +\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5},$ $-\frac{1}{3},\ +\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5},\ +\frac{1}{2}\sqrt{2},\ +\sqrt{2},$ $+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5},\ +3$
. . .	. . . . .

Убедившись теперь, что и все алгебраические числа составляют счетное множество, мы могли бы подумать, что вообще не существует других бесконечных множеств кроме счетных. Прежде чем опровергнуть это предположение, остановимся более подробно на способах оперирования с множествами, введя некоторые новые понятия.

Если мы выделим в каком-нибудь множестве $\mathfrak{M}$ те из его элементов, которые имеют общим какой-либо определенный частный признак, то они будут образовывать так называемое п о д м н о ж е с т в о $\mathfrak{N}$, которое будет содержаться в множестве $\mathfrak{M}$, что пишется так $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}$. Так, например, в множестве всех людей можно выделить подмножество всех толстяков или в множестве всех натуральных чисел можно выделить подмножество всех четных чисел. Множество всех натуральных чисел счетное, но и его подмножество, множество всех четных чисел, тоже является счетным множеством. На самом деле, написав множество натуральных чисел, а под ним множество всех четных чисел

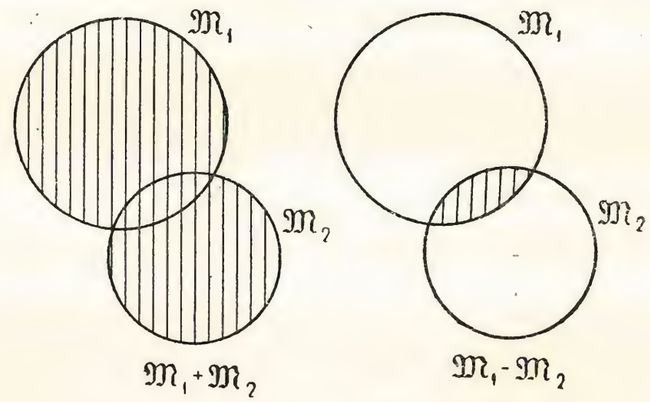
$$\mathfrak{M}\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots\}$$
$$\mathfrak{N}\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\ \ldots\},$$

мы наглядно убеждаемся, что между ними существует взаимно-однозначное соответствие. Поэтому множество $\mathfrak{M}$ и множество $\mathfrak{N}$ будут эквивалентны между собою, несмотря на то что множество $\mathfrak{N}$ содержится в множестве $\mathfrak{M}$. Все множества, в которых можно выделить эквивалентное им подмножество, являются бесконечными множествами.

С множествами можно производить различные операции. Если даны множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, то под их с у м м о й $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$ мы понимаем такое множество $\mathfrak{M}$, которое будет содержать все элементы множества $\mathfrak{M}_1$, а также все элементы множества $\mathfrak{M}_2$. При этом если множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ имеют какие-либо общие элементы, то мы включаем их в сумму лишь один раз. Например:

$$\mathfrak{M}_1\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} + \mathfrak{M}_2\{1,\ 2,\ 5,\ 6\} = \mathfrak{M}\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

Нетрудно доказать, что сумма двух, трех и т. д. и даже счетного множества счетных множеств будет опять счетным множеством.



Сложение и умножение множеств

Под п р о и з в е д е н и е м двух множеств $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ мы понимаем множество $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$, которое содержит только элементы, общие обоим множествам $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Поэтому если множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ не имеют общих элементов, то их произведение $\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$ будет равно 0, хотя бы и ни одно из этих множеств не было равно 0. Значит, для умножения множеств нельзя применить алгебраический закон, где произведение равно лишь тогда нулю, если один из множителей равен 0. Например:

$$\mathfrak{M}_1\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \cdot \mathfrak{M}_2\{1,\ 2,\ 5,\ 6\} = \mathfrak{M}\{1,\ 2\};$$
$$\mathfrak{N}_1\{1,\ 2\} \cdot \mathfrak{N}_2\{3,\ 4\} = 0.$$

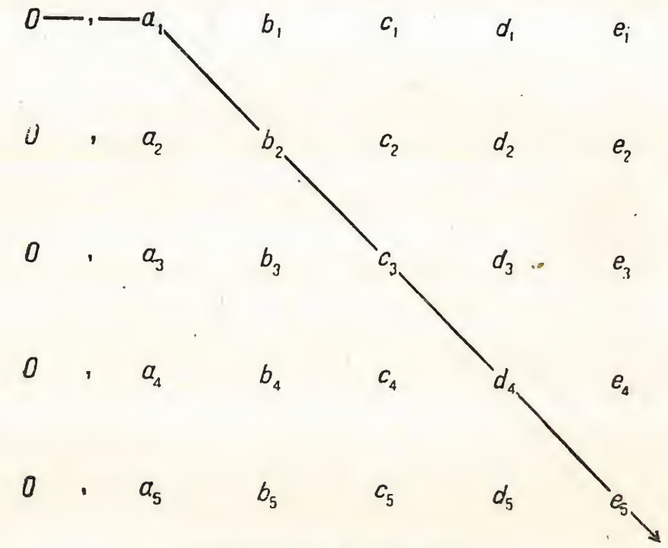
Под п р о и з в е д е н и е м в т о р о г о р о д а $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ двух множеств $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ обычно понимают множество упорядоченных пар элементов обоих множеств. Возьмем для примера множества

$$\mathfrak{M}_1\{1,\ 2\} \text{ и } \mathfrak{M}_2\{2,\ 3\},$$

тогда

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 = \{\{1,\ 2\},\ \{2,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\}\}.$$

Кантор доказал, что существуют несчетные множества, т. е. множества, элементы которых нельзя занумеровать. Примером несчетных множеств является множество всех вещественных чисел в интервале от 0 до 1. Докажем, что противоположное утверждение приводит к противоречию. С этой целью предположим, что все вещественные числа между 0 и 1 составляют счетное множество. Если бы это было так, то эти вещественные числа можно было бы пронумеровать, составив таблицу



Несчетное множество

всех вещественных чисел. Но каждое вещественное число можно написать одним единственным способом как десятичную дробь с бесконечным количеством десятичных знаков. Напишем все эти числа. Первое будет равно: 0, $a_1\,b_1\,c_1$..., второе: 0, $a_2b_2c_2$..., третье: 0, $a_3b_3c_3$,... и т. д., где вместо a_1, b_1,..., a_2, b_2, ..., a_3, b_3,... будут стоять цифры от 0 до 9. Если мы наткнемся на дробь, которая обрывается, например $\frac{1}{2} = 0{,}5$, то для того чтобы наша таблица была однородной, заменим ее бесконечной дробью, например, вместо 0,5 мы будем писать 0,4999..., что, как известно из арифметики, допустимо. Тогда, если бы наше предположение, что множество всех чисел между 0 и 1 является счетным множеством, было верным, то составленная таким образом таблица содержала бы все вещественные числа между 0 и 1. Однако нетрудно доказать, что существует такое вещественное число между 0 и 1, которое не умещается в эту таблицу. Мы образуем его следующим путем. Его первый десятичный знак a мы выбираем так, чтобы он отличался от a_1, т. е. от первого десятичного знака первого числа; его второй десятичный знак b мы выбираем так, чтобы он отличался от b_2, т. е. от второго десятичного знака второго числа; его третий десятичный знак c мы выбираем так, чтобы он отличался от c_3, и т. д.

Двигаясь, таким образом, по диагонали, мы убедимся в том, что число 0, $a_1b_2c_3$... не может содержаться в нашей таблице. Оно не может быть тождественным с первым ее числом уже потому, что его первый знак отличен от первого знака этого первого числа, со вторым ее числом оно также не может быть тождественным, потому что его второй знак отличен от второго знака второго числа, и т. д. Значит, наша таблица не исчерпывает множества вещественных чисел между 0 и 1, которое является несчетным множеством. Так как множество всех вещественных чисел между 0 и 1 эквивалентно множеству всех точек на отрезке, равном 1, то и последнее множество будет несчетным. Но множество всех точек отрезка между 0 и 1 представляет собою непрерывность—континуум. Таким образом, континуум является примером несчетного множества.

Другим примером несчетного множества будет множество всех точек внутри данного квадрата или внутри данного куба и т. д.

Далее, понятно, что все трансцендентные числа будут составлять несчетное множество. В самом деле, если бы трансцендентные числа между 0 и 1 составляли счетное множество, то прибавлением к ним алгебраических чисел, которые, как мы уже знаем, составляют счетное множество, мы получили бы снова счетное множество. Однако трансцендентные числа вместе с алгебраическими составляют вещественные числа, множество которых, как мы только что доказали, несчетно. Таким образом, предположение о счетности множества трансцендентных чисел привело нас к противоречию—они образуют несчетное множество.

Дальнейшее исследование приводит к новому понятию, к понятию трансфинитного числа, и прежде всего так называемого количественного, или кардинального, трансфинитного числа.

Два конечных множества эквивалентны, если количество их элементов одинаково. Мы можем перенести это и на бесконечные множества: каждому множеству мы припишем определенное, но уже не конечное, а трансфинитное, т. е. бесконечное, число, которое характеризует это множество, и назовем это число мощностью данного множества. Мощность мы определим так: два эквивалентных множества, т. е. множества, элементы которых могут быть приведены во взаимно-однозначное соответствие друг с другом, имеют одинаковую мощность, и, наоборот, два множества одинаковой мощности эквивалентны. Таким образом, понятие взаимно-однозначного соответствия или отображения двух множеств друг на друга,

лежащее в основе понятия эквивалентности, составляет основу и понятия мощности. Мощность множества $\mathfrak{M}$ представляет собой поэтому не что иное, как любое множество $\mathfrak{m}$, эквивалентное множеству $\mathfrak{M}$. Ее называют также кардинальным числом данного множества.

В случае если данное множество конечное, его кардинальное число будет совпадать с количеством его элементов. В случае бесконечного множества мы приходим к понятию трансфинитных кардинальных чисел, к новому расширению понятия числа.

Из понятия мощности получается важное новое определение бесконечности. До Кантора философы и математики определяли бесконечное путем отрицания, а именно: бесконечно то, что не является конечным. Несостоятельность подобного определения ясна, потому что все конечное придется тогда определить не иначе, как сказав, что это то, что не является бесконечным. На самом же деле бесконечное можно определить по следующему признаку: во всяком бесконечном множестве всегда можно выделить подмножество, имеющее одинаковую мощность с самим множеством. В конечном множестве этого сделать нельзя: в конечном множестве любое подмножество всегда имеет мощность меньшую, чем мощность всего подмножества.

Мы уже видели, что если мы присоединим к счетному множеству другое счетное множество, то опять получим счетное множество, и что счетное множество счетных множеств будет опять счетным множеством. Таким образом, переход от счетного множества к множеству континуум не так прост.

Если мы возьмем множество множеств $\mathfrak{C}$, имеющих каждое мощность континуум, то получим множество континуум, не только когда множество этих множеств будет конечным или счетным, но даже и тогда, когда оно будет иметь мощность континуум. Так, например, множество всех точек отрезка и множество всех точек, заполняющих площадь квадрата, будут иметь одну и ту же мощность континуум. Ту же мощность будет иметь и множество всех точек внутри куба, несмотря на то что отрезок имеет одно, квадрат—два, куб—три измерения.

Спрашивается, существуют ли вообще множества, имеющие мощность больше континуума? Пример такого множества придется взять из области анализа, т. е. той части математики, которая изучает переменные величины. Если мы возьмем такую переменную величину x, которая может принимать любые значения от 0 до 1, и другую переменную величину y, значение которой будет зависеть от значения x, т. е., как говорят в математике, y является функцией от x, то можно доказать, что множество всевозможных непрерывных функций $y = f(x)$ будет иметь мощность континуум. Но если мы возьмем

не только непрерывные функции, но вообще всевозможные функции, в том чисел и прерывные (т. е. допускающие скачки, разрывы), то окажется, что их множество будет иметь мощность большую, чем континуум.

Таким образом, мы находим ряд мощностей, а именно: мощность 0, конечные мощности 1, 2, 3, 4, ..., затем мощность $\mathfrak{a}$ всего этого ряда (т. е. мощность счетного множества), далее мощность континуум $\mathfrak{c}$, затем мощность всех функций $\mathfrak{f}$, и так этот ряд мощностей можно продолжать беспредельно. Это возможно, так как доказано, что если мы имеем какое-либо множество $\mathfrak{M}$ и построим всевозможные подмножества $\mathfrak{N}$ этого множества $\mathfrak{M}$, а затем построим множество $\mathfrak{P}$, состоящее из всех $\mathfrak{N}$, то мощность множества $\mathfrak{P}$ будет больше, чем мощность множества $\mathfrak{M}$. До сих пор однако мы не знаем, существуют ли множества, которые имеют мощность большую, чем мощность $\mathfrak{a}$, но меньшую, чем мощность $\mathfrak{c}$.

На кардинальные числа можно распространить операцию сложения, определив сумму двух чисел $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$, представленных множествами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, не имеющими общих элементов, как мощность $\mathfrak{s}$ множества $\mathfrak{S} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$. Аналогично, если числа $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ представлены множествами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, не имеющими общих элементов, то произведение чисел $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ определяют как мощность $\mathfrak{p}$ множества $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}$.

Трансфинитные числа $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$,... не подчиняются, конечно, законам, действующим для обыкновенных чисел. Для работы с ними существуют особые правила. Приведем несколько примеров трансфинитной арифметики:

$$\mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} + n = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a},$$
$$\mathfrak{c} + 1 = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c} + n = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{f} + 1 = \mathfrak{f}, \quad \mathfrak{f} + n = \mathfrak{f}, \quad \mathfrak{f} + \mathfrak{a} = \mathfrak{f}, \quad \mathfrak{f} + \mathfrak{c} = \mathfrak{f}, \quad \mathfrak{f} + \mathfrak{f} = \mathfrak{f},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Трансфинитные числа следует умножать, применяя произведение второго рода. Тогда получим следующую «таблицу умножения»:

$$n\mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}^n = \mathfrak{a},$$
$$n\mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad n^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c},$$
$$n^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{f}, \quad \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{f}, \quad \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{f}, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Дальнейшее развитие теория множеств получает, когда вводится понятие порядка, т. е. делается различие между множествами одинаковой мощности в зависимости от того, как следует один элемент за другим. Для этого сначала устанавливается признак предшествования элементов, а тем самым уста-

навливается и порядок следования элементов. В понятие $a \prec b$, т. е. элемент a предшествует элементу b, не вкладывается представление о следовании в пространстве и во времени, оно определяется лишь следующими двумя формально-логическими условиями, которым должно удовлетворять это соотношение: 1) для двух различных элементов a и b данного множества $\mathfrak{M}$ всегда должно быть или $a \prec b$, или $b \prec a$; 2) если a, b, c три разных элемента множества $\mathfrak{M}$ и если $a \prec b$ и $b \prec c$, то будет и $a \prec c$.

Так, например, для ряда натуральных чисел признаком следования будет $>$ больше и $<$ меньше. При этом он может быть упорядочен двумя различными способами: или в виде $\{1, 2, 3, ..\}$, или же $\{..., 3, 2, 1\}$. Но не все счетные множества упорядочены по тому же образцу, как множество $\{1, 2, 3, ...\}$. Это видно на примере множества $\{0,1, -1, 2, -2, ...,\}$, где следование хотя и идет по определенному закону, но не по возрастающей величине элементов, как в натуральном ряду.

Таким образом, ясно, что понятие «упорядоченного множества» не является просто разновидностью понятия «множества», а совершенно новым образованием, поскольку две совокупности, состоящие из одних и тех же элементов, но по-разному упорядоченных, представляют одно множество, но два различных упорядоченных множества.

С введением принципа упорядочения возникает проблема— можно ли упорядочить в с я к о е множество? В 1904 г. итальянский математик Цермело доказал, что всякое множество можно упорядочить, однако при этом Цермело был вынужден принять особую аксиому, так называемую аксиому «свободного выбора». Она гласит, что, каково бы ни было множество $\mathfrak{M}$, образованное из множеств $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, ..., не имеющих общих элементов, всегда можно образовать такое множество $\mathfrak{P}$, которое будет иметь с каждым из множеств $\mathfrak{N}$ по одному и только по одному общему элементу.

Пуанкаре пояснил это следующим простым примером. Пусть у нас имеется столько же пар сапог, сколько существует целых чисел; эти п а р ы мы можем пронумеровать числами от 1 до бесконечности. Сколько же у нас сапог? Равно ли их число числу пар? Равно, если в каждой паре правый сапог отличается от левого (в самом деле, достаточно отмечать номером $2n-1$ правый сапог и номером $2n$ левый сапог n-й пары). Не равно, если правый сапог не отличается от левого: тогда указанная операция становится невозможной. По крайней мере это так, если не принять аксиомы Цермело; в противном случае можно было бы выбирать н а у д а ч у из к а ж д о й пары один сапог, который мы считали бы п р а в ы м. Пуанкаре, как и все феноменалисты, считает, что то, что существует, существует только в определении. Поэтому, раз мы можем определить отличие правого сапога от левого, мы можем пронумеровать их. Однако, в случае если бы вместо сапог у нас было неисчислимое множество чулок, мы не могли бы дать определение правого и левого чулка, а значит, не могли бы провести эту операцию.

Имея благодаря этой аксиоме возможность упорядочить всякое множество, можно ввести классификацию множеств по определенным п о р я д к о в ы м т и п а м. Два множества, одинаково упорядоченные, называют п о д о б н ы м и, и все взаимно подобные множества определяют один порядковый тип. Множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, ...\}$, имеющее первый член, но не имеющее последнего члена, будет представлять порядковый тип, обозначаемый ω. Наоборот, множество натуральных чисел, не имеющее первого члена, но имеющее последний член $\{..., 3, 2, 1\}$, представляет порядковый тип $^*\omega$. Для порядковых типов будет действовать своя арифметика. Так, например, верно, что $1+\omega=\omega$, но неверно, что $\omega+1=\omega$; также и $^*\omega+1={}^*\omega$, но неверно, что $1+{}^*\omega={}^*\omega$. Если в упорядоченном множестве само оно и каждое его подмножество имеют начальный элемент, то такое множество называется в п о л н е у п о р я д о ч е н н ы м. Для вполне упорядоченных множеств можно ввести не только кардинальные, но и п о р я д к о в ы е числа, являющиеся порядковыми типами вполне упорядоченных множеств. Эти числа были также введены Кантором.

Всякое вполне упорядоченное множество с порядковым числом μ может быть сосчитано посредством порядковых чисел $<\mu$. Так, например, множество $\{a, b, c, d\}$, имеющее порядковое число 4, может быть сосчитано посредством порядковых чисел 0, 1, 2, 3. Это обстоятельство дает возможность написать последовательность порядковых чисел: сначала пойдут все конечные порядковые числа 0, 1, 2, 3, ..., а после этого множества—первое трансфинитное порядковое число, которым окажется ω—порядковый тип множества $\{0, 1, 2, 3, ...\}$. Это порядковое число существенно отличается от всех предыдущих, так как, являясь п р е д е л ь н ы м числом, не имеет непосредственного предшественника. После ω идут порядковые числа $\omega+1$, $\omega+2$, ..., и таким образом получается последовательность 0, 1, 2, 3, ..., ω, $\omega+1$, $\omega+2$, ..., имеющая порядковый тип $\omega+\omega=\omega\cdot 2$, отчего и следующее за этой последовательностью порядковое число будет $\omega\cdot 2$. Продолжая дальше, расширим нашу последовательность до 0, 1, 2, ..., ω, $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 2+1$, ..., $\omega\cdot 3$, ..., $\omega\cdot n$, $\omega\cdot n+1$, ... Это множество имеет порядковый тип ω^2, и, значит,

следующее порядковое число будет ω^2. Идя снова дальше, получим последовательность

$$0, 1, \ldots, \omega, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots,$$

имеющую порядковый тип Ω, и т. д.

Если допустить справедливость весьма важной хотя и оспариваемой теоремы, что всякое множество можно превратить во вполне упорядоченное, то и кардинальные трансфинитные числа можно написать в порядке возрастающей последовательности, имеющей вначале наименьшее кардинальное трансфинитное число $\aleph_0$ (алеф—нуль), затем $\aleph_1$ и т. д. Первым окажется счетное кардинальное число $\mathfrak{a} = \mathfrak{P}_0$. Если обозначим мощность континуума $\mathfrak{c} = \aleph_1$, то наверняка будет $\aleph \geqslant \aleph_1$, однако вопрос, действительно ли $\aleph = \aleph_1$, как это нам подсказывает интуиция, до сих пор не решен и составляет проблему континуума.

Какое однако значение имеет вся эта столь абстрактная теория, каково практическое применение теории множеств? Прежде всего надо иметь в виду, что теория множеств была создана с целью устранения из математики противоречий, связанных с бесконечностью. Справилась ли теория множеств с этой задачей? Оказывается, что она с этой задачей не справилась. Наоборот, она привела к новым, более глубоким противоречиям, хотя ей и удалось преодолеть ограниченность теории пределов. Противоречия теории множеств настолько значительны, что они поставили под сомнение возможность существования математики в целом как формально-логически обоснованной науки. Установление этих противоречий не означает еще их решений. Последнее представляет проблему тем более сложную и трудную, чем тоньше и глубже современная математика расчленила первоначальные расплывчатые наглядные представления, исследуя микроструктуру континуума, создав свои логические системы, и т. д.

Противоречия между математикой бесконечного и формальной логикой, снятые теорией множеств лишь поверхностно, ушли вглубь, да иначе и быть не могло. Еще раз оправдалась мысль Энгельса: «Элементарная математика, математика постоянных величин, движется, по крайней мере в целом и общем, в границах формальной логики; математика переменных величин, существеннейший отдел которой составляет исчисление бесконечно-малых, есть в сущности не что иное, как применение диалектики к математическим отношениям»[1]. А по адресу метафизиков: «Нет ничего комичнее, чем жалкие уловки, увертки и фикции, к которым прибегает математика, чтобы разрешить это противоречие, примирить между собой низшую и высшую

[1] Маркс и Энгельс, Собр. соч., т. XIV, стр. 134.

математику; разъяснить им, что то, что является их бесспорным результатом, не представляет собой чистой бессмыслицы...»[1].

Противоречия теории множеств вылились в антиномии—парадоксы, сформулированные в начале XX в. Первый парадокс: существует ли множество в с е х кардинальных чисел? Так как всякое множество, будучи построено, дает возможность путем построения множества всех его подмножеств получить новое множество, более мощное, а значит, имеющее и большее кардинальное число, то ясно, что множество всех кардинальных чисел является противоречивым понятием.

Другой парадокс, Бурали-Форти: существует ли множество всех порядковых типов, т. е. можно ли построить множество всех типов, характеризующих всевозможные порядки следования? Это опять противоречивое понятие, потому что если бы такое множество было построено, то тем самым был бы создан новый порядковый тип.

Третий парадокс, Цермело—Весселя: существует ли множество всех множеств, которые не содержат самих себя? Разобьем все множества на две категории: в первую категорию A включим множества, которые в качестве своих элементов содержат самих себя, во вторую категорию B—множества, которые себя не содержат. После этого построим множество всех множеств категории A. Спрашивается, будет ли это множество принадлежать к категории A или к категории B? Будем рассуждать так: если множество всех множеств категории A будет принадлежать к категории A, то оно будет множеством, которое себя не содержит; но если оно будет множеством категории A, то, являясь множеством всех множеств категории A, оно должно будет содержать и само себя, т. е. оно будет множеством категории B. Таким образом, полагая, что оно будет множеством категории A, мы пришли к противоречию. Если бы однако это множество всех множеств категории A было бы множеством категории B, т. е. множеством, содержащим само себя, то оно должно было бы содержать само себя, а так как оно является множеством всех множеств, не содержащих само себя, то оно должно быть множеством, не содержащим само себя. Получается снова противоречие.

Подобного рода противоречия можно построить в области формальной логики, вовсе не оперируя с бесконечными множествами.

Четвертый парадокс: существует ли множество всех множеств? Здесь мы снова наталкиваемся на противоречивое понятие, потому что, как только множество всех множеств будет

[1] Там же, стр. 392.

построено, оно само будет представлять новый элемент, который оно до этого не содержало в себе.

Пятый парадокс, Ришара—Ресселя: существует ли наименьшее целое число, которое нельзя определить предложением, состоящим меньше чем из ста русских слов?

Такое число существует, потому что русский язык не имеет бесконечного количества слов, а следовательно, и предложений, определяющих числа и состоящих не больше чем из ста слов. Значит, существует бесконечное множество чисел, которые не могут быть определены предложением, состоящим меньше чем из ста русских слов, и среди них имеется и наименьшее число этого рода.

Но такое число не существует, потому что само напечатанное выше разрядкой предложение определяет его, между тем как это предложение содержит меньше чем сто русских слов, что противоречит его содержанию, так как это число не может быть определено предложением, содержащим меньше ста русских слов. Этот же парадокс можно облечь еще и в такую форму: требуется назвать «наименьшее число, не названное в этой книге».

Шестой, пожалуй, наиболее важный парадокс вытекает из аксиомы Цермело и касается понятия меры множества, о котором мы будем говорить в дальнейшем.

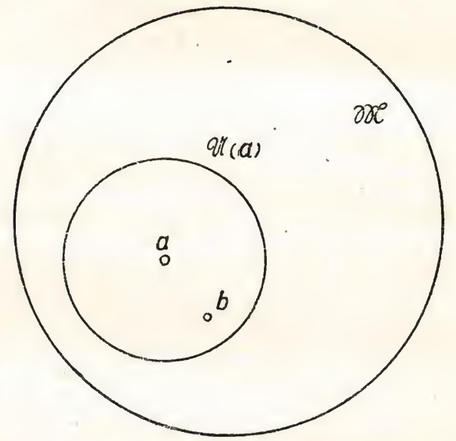
Таким образом, очевидно, что теория множеств не смогла устранить противоречия, имеющиеся в математике, поскольку сама она прибавила ряд новых противоречий. Она привела к тому, что ряд математиков, отшатнувшись от формальной логики, ударились в интуицию, в иррационализм, в мистику. Другие буржуазные математики не желают признавать формальную логику недостаточной; одни ищут выхода в том, что в угоду ей начинают игнорировать целые области математики; некоторые же тщетно стараются преодолеть формальные противоречия логического обоснования математики все новой, еще более изощренной формализацией.

Однако, несмотря на то что теория множеств не выполнила той задачи, для которой она собственно была построена, она придала математике совершенно новый вид и содействовала ее мощному развитию.

Расскажем сначала о применении теории множеств к так называемым точечным множествам.

Основным понятием точечных множеств является понятие окрестности. Окрестностью $\mathfrak{U}(a)$ какой-либо точки a множества $\mathfrak{M}$ называют любое подмножество множества $\mathfrak{M}$, которое содержит точку a и по меньшей мере еще одну какую-нибудь точку b этого множества $\mathfrak{M}$.

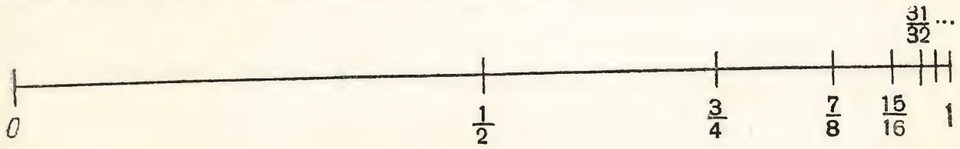
Глубоко принципиальное значение точечных множеств для всей математики состоит в том, что они дают возможность ввести понятие предельной точки. Точка x (безразлично, принадлежит ли она к данному точечному множеству $\mathfrak{M}$ или нет) будет предельной точкой этого множества, если всякая окрестность $\mathfrak{U}(x)$ содержит бесконечное множество точек множества $\mathfrak{M}$. Здесь чрезвычайно важно отметить, что понятие предельной точки не предполагает изменения, а исходит из статических понятий, поскольку множество нам задано, т. е. предполагается наперед построенным.



Окрестность

От понятия предельной точки, через некоторые промежуточные звенья, мы придем к понятию предела и введем его, не пользуясь (по крайней мере в явном виде) понятием изменения, переменности. В этом смысле теория множеств делает попытку заменить расплывчатые динамические понятия предела и переменных, которыми для своего обоснования пользовался анализ, начиная с Коши и до второй половины XIX в., статическими понятиями.

Очевидно, что конечное множество не имеет предельных точек. С другой стороны, Вейерштрасс, один из крупнейших германских математиков прошлого века, сторонник критического пересмотра основ анализа и поборник его обоснования на законах арифметики, доказал, что всякое бесконечное, но ограниченное множество, т. е. множество, лежащее в конеч-

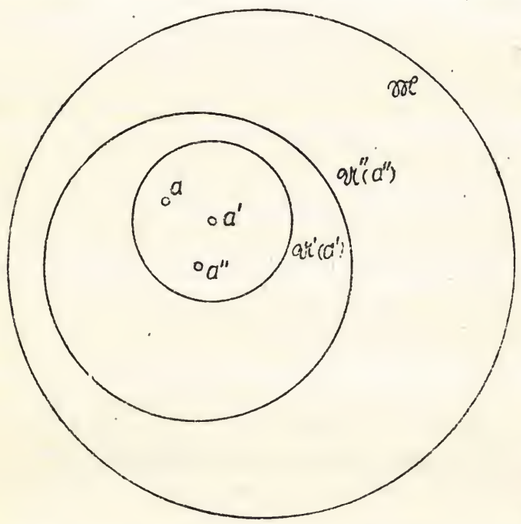


Предел последовательности

ной области (например, бесконечное множество точек, лежащих внутри круга), имеет по меньшей мере одну предельную точку. Например, множество точек отрезка, имеющих от 0 расстояния $1/2, 3/4, 7/8, 15/16, \ldots$, имеет предельную точку, которая будет лежать на расстоянии, равном 1, хотя сама она не будет принадлежать к данному множеству. Если все предельные точки огра-

ченного точечного множества $\mathfrak{M}$ принадлежат к $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ называют замкнутым множеством. Произведение двух замкнутых множеств $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}$ опять будет замкнутым множеством. Всякое замкнутое множество имеет крайние точки, так, например, замкнутое множество на отрезке имеет самую первую и самую последнюю точки.

Если мы к какому-либо точечному множеству $\mathfrak{M}$ найдем все его предельные точки, то они составят множество $\mathfrak{M}'$, называемое производным множеством множества $\mathfrak{M}$.



Доказательство замкнутости производного множества

Каково бы ни было множество $\mathfrak{M}$, его производное множество $\mathfrak{M}'$ всегда будет замкнутым множеством. Доказательство этой важнейшей теоремы достаточно просто и притом настолько характерно для доказательств этой области математики, что следует с ним ознакомиться.

Для того чтобы $\mathfrak{M}'$ было замкнутым множеством, оно, согласно определению замкнутого множества, должно было бы содержать свое производное множество $\mathfrak{M}''$. Пусть a'' какая-либо предельная точка множества $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{U}''(a'')$ ее окрестность. Тогда $\mathfrak{U}''(a'')$ должна содержать в себе хотя бы одну точку a' множества $\mathfrak{M}'$, а, значит, содержать и окрестность $\mathfrak{U}'(a')$ этой точки. Но внутри $\mathfrak{U}'(a')$ должна содержаться хотя бы одна точка a множества $\mathfrak{M}$, т. е. a'' оказывается предельной точкой множества $\mathfrak{M}$, иначе говоря, действительно принадлежит к множеству $\mathfrak{M}'$.

Если же к множеству $\mathfrak{M}$ присоединить его производное множество $\mathfrak{M}'$, то полученное таким образом множество $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}'$ всегда будет замкнутым множеством. Операция перехода от множества $\mathfrak{M}$ к множеству $\overline{\mathfrak{M}}$ называется замыканием. Полученные при этом (в случае если $\mathfrak{M}$ состоит из точек отрезка) крайние точки множества $\overline{\mathfrak{M}}$ называются нижней и верхней границами множества.

Для упорядоченных множеств можно ввести понятие последовательности. Упорядоченное множество называется последовательностью тогда, когда каждому натуральному числу n может быть поставлен в соответствие его элемент a_n. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ есть последовательность точек. Рассмотрим множества $\mathfrak{M}_n = \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$. Пусть теперь все множества $\mathfrak{M}_n$ имеют общую часть $\mathfrak{M}$—ее называют полным пределом последовательности. Нижняя граница этого множества $\inf \mathfrak{M}$ называется нижним пределом, верхняя $\sup \mathfrak{M}$ — верхним пределом последовательности. Последовательность сходится тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ состоит из единственной точки, которая и является пределом.

Таким образом, действительно, понятие предела последовательности, а с его помощью и диференциала, производной и другие основные понятия диференциального и интегрального исчислений могут быть с помощью теорий множеств выведены формально-логическим путем, без использования понятий движения, приближения и т. д. Прежние расплывчатые понятия теперь расчленены, потеряли наглядно эмпирический вид, приобрели рациональную форму. Но затруднения не преодолены, а лишь отодвинуты, понятие изменения из математики вытеснить не удалось, зато тем более прочно оно укоренилось в логике. Самые бесконечные последовательности элементов рассматриваются как застывшие, подчиняющиеся законам формальной логики, и при всем этом они остаются неустранимыми для формальной логики парадоксами теории множеств.

ГЛАВА ПЯТАЯ

Теоретико-множественная критика основных понятий анализа.—Обоснование диференциального исчисления.—Понятие функции.—Теория функций комплексного переменного.—Теория функций действительного переменного.—Обоснование интегрального исчисления.—Диференциальные уравнения.—Интегральные уравнения.—Вариационное исчисление.—Функциональный анализ.

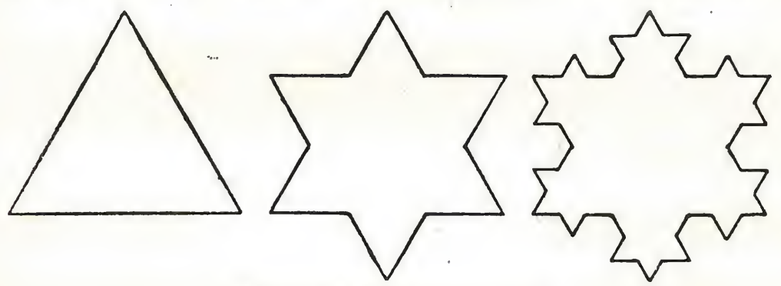
Анализ подвергся глубокому влиянию со стороны теории множеств, влиянию, которое не ограничивается попытками заново обосновать его. Теория множеств открыла в математике целую критическую эпоху, когда пересматриваются постепенно одно за другим все основные понятия математики. Многие из тех положений математики, которые казались до середины XIX в. очевидными и доказанными, вытекающими непосредственно из наглядных геометрических образов, были пересмотрены. В результате часть из них была вовсе выброшена, так как они были признаны неточными или имеющими лишь ограниченное значение.

Приведем несколько примеров, относящихся к понятию к р и в о й.

Раньше считали, что всякая непрерывная функция обязательно имеет п р о и з в о д н у ю или, выражаясь геометрически, что всякая кривая, не имеющая разрывов и скачков, имеет в каждой своей точке вполне определенное направление, а значит, и к а с а т е л ь н у ю. Между тем более глубокий анализ понятия непрерывности, который стал возможен лишь на основе теории множеств, дал прежде всего точное определение непрерывности. Он выявил далее, что существует класс непрерыв-

ных функций, не имеющих производной ни в одной точке, или, выражаясь геометрически, что существуют кривые без разрывов и скачков, которые все же ни в одной точке не имеют определенного направления. Первый пример таких «неразумных» функций построил в 1871 г. Вейерштрасс. После Вейерштрасса другие математики указали более простые и наглядные примеры построения таких кривых. Одна из них, дающая ясное представление об идее, лежащей в основе подобных функций, строится следующим образом.

Возьмем равносторонний треугольник. Исключим среднюю треть каждой из его сторон и над исключенными отрезками построим новые, равносторонние треугольники, направленные

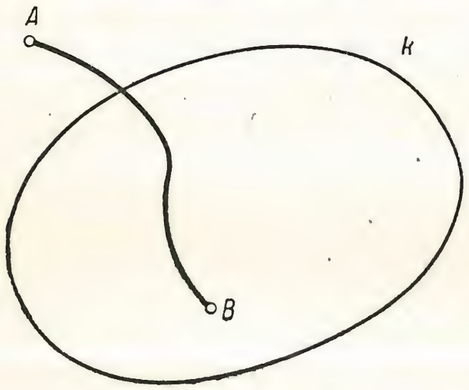


Кривая без касательной

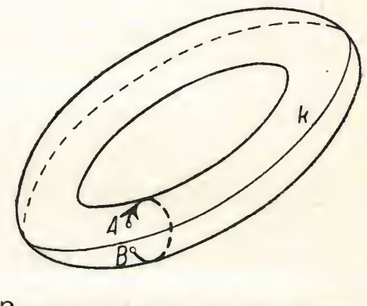
во-вне, получая тем самым шестиконечную звезду. Теперь из каждой стороны этой звезды исключим снова среднюю треть и построим над исключенными отрезками новые, направленные во-вне, равносторонние треугольники. Этот процесс будем продолжать все дальше. В пределе наша ломаная линия перейдет в кривую, которая ни в одной точке не имеет касательной. И это произойдет не потому, что кривая имеет бесконечное количество вершин, а потому, что в любой своей точке она меняет свое направление.

Необходимо подчеркнуть, что кривая, имеющая касательную, и кривая, не имеющая касательной, в одинаковой степени изобразимы на чертеже и в одинаковой степени реальны. Если в механике и физике мы встречаемся почти исключительно с кривыми, имеющими касательные, то это происходит оттого, что эти кривые представляют собой лишь известную ступень приближения к действительности. Так, например, при полете снаряда по определенной траектории кривая, описываемая каждым отдельным его атомом, чрезвычайно сложна. В случае изучения таких приблизительно гладких траекторий (хорды в достаточно близких точках имеют почти совпадающие направления) употребляются диференцируемые функции. В таких же случаях, как броуновское движение, естественно применяются недиференцируемые функции.

Другим примером пересмотра математических и геометрических понятий, казавшихся прочно обоснованными, может служить развитие понятия замкнутой кривой. Считали очевидным, что если кривая на плоскости замкнута и нигде сама себя не пересекает, то она делит плоскость на две области так, что из точки A, находящейся в одной из них, например во внешней области, нельзя перейти в точку B, находящуюся во внутренней области, иначе, как пересекая кривую. С новой, теоретико-множественной, точки зрения это положение, правда, не было опровергнуто, но все же современная математика, не считая его очевидным, потребовала доказательства, которое и было дано Жорданом в 1893 г. Дело в том, что такое проявление замкнутости не является свойством самой кривой (например, окружности), а свойством той поверхности, на которой эта кривая находится, т. е. в данном случае свойством плоскости.



Кривая Жордана



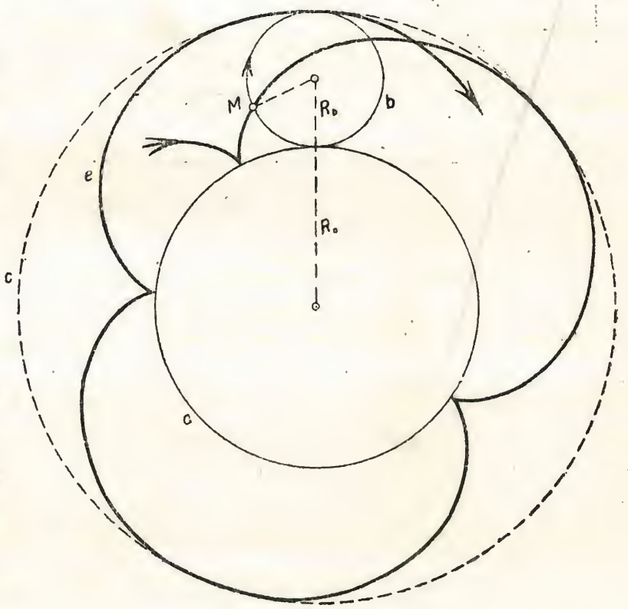
Замкнутая кривая на поверхности тора

Существуют поверхности, которые отличаются в этом отношении от плоскости; они не делятся любой замкнутой кривой на две отделенные друг от друга области. Так, например, окружность, проведенная вдоль поверхности тора (поверхность баранки или плавательного круга), не разбивает эту поверхность на две раздельных области, так как из точки A, находящейся вблизи окружности k по одну ее сторону, можно перейти, не пересекая окружности, в точку B, находящуюся вблизи окружности k по другую ее сторону.

Возьмем третий пример, показывающий, насколько ограничено обычное представление, будто кривая, являющаяся, как известно, одномерным образованием, т. е. обладающая лишь длиной, не может сплошь заполнять двумерное образование — плоскость.

Прежде всего рассмотрим эпициклоиду, кривую e, которую описывает какая-либо точка M окружности b, катя-

щейся по внешней стороне другой окружности a. Если радиусы R_a и R_b обеих окружностей будут соизмеримы (т. е. если отношение $\frac{R_a}{R_b}$ будет рациональным числом), тогда эпициклоида будет замкнутой; она будет состоять из конечного количества дуг. Но если эти радиусы окажутся несоизмеримыми, то эпициклоида никогда не замкнется. Имея бесконечное количество дуг, она будет как угодно близко проходить к любой произвольно выбранной точке как на окружности a, так и внутри пояса, ограниченного окружностями a и c. Однако, как легко понять, и на окружности a и внутри пояса можно будет все же указать бесконечное множество точек, через которые эпициклоида проходить не будет.

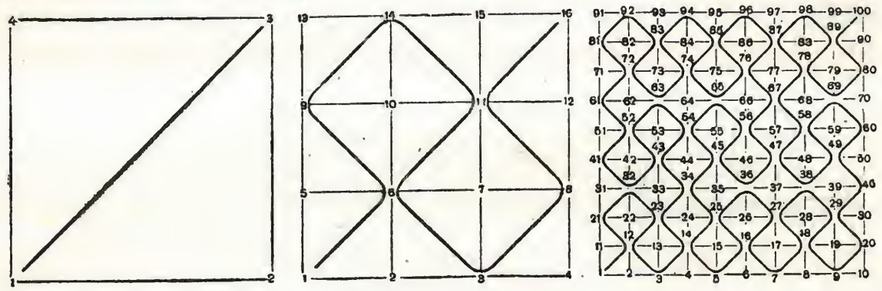


Эпициклоида

В 1890 г. итальянским математиком Пеано был предложен способ построения непрерывной кривой, проходящей не только как угодно близко к любой точке внутри данного квадрата, но действительно через все лежащие внутри него точки. Кривая Пеано является результатом следующего процесса (см. черт. на стр. 100). В квадрате 1, 2, 3, 4 проводим сначала диагональ 1, 3. Затем разбиваем квадрат на девять одинаковых квадратиков с вершинами: 1, 2,...,16, занумерованными слева направо и построчно снизу вверх. Проводим в них диагонали так, что получаем ломаную линию: 1, 6, 9, 14, 11, 6, 3, 8, 11, 16. Потом снова разбиваем каждый квадратик на девять одинаковых, еще меньших, квадратиков и, нумеруя таким же путем их вершины 1, 2,..., 100, проводя по той же системе диагонали, снова получаем ломаную линию: 1, 12, 21,..., 89, 100. Нетрудно доказать, что если повторить этот процесс n раз, а затем перейти к пределу при $n \to \infty$, то наша ломаная линия заполнит всю площадь квадрата, действительно пройдя через все его точки.

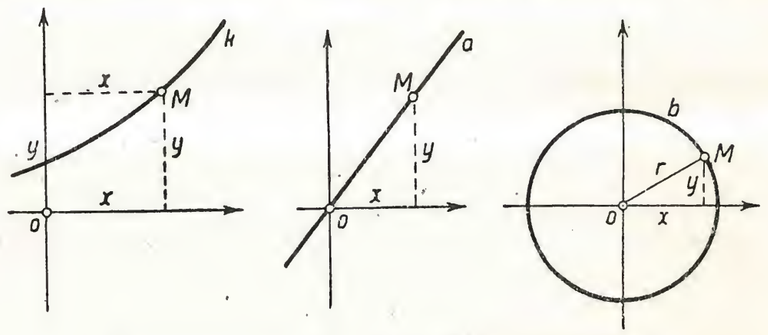
Приведенные примеры показывают, что наглядное геометрическое представление не всегда в состоянии достоверно руково-

дить нами в математических исследованиях. Между тем основные понятия дифференциального исчисления—производная, дифференциал—с самого своего зарождения и в дальнейшем развитии математики связывались именно с наглядными представлениями, получаемыми из геометрии и из механического движения.



Кривая Пеано

Необходимой предпосылкой для возникновения дифференциального исчисления и всего математического анализа была а н а л и т и ч е с к а я г е о м е т р и я, созданная Декартом в 1637 г. Она систематически ввела алгебру в геометрию, применив для изучения геометрических образов метод координат. Положение точки M на плоскости определяют к о о р д и н а т а м и x и y, т. е. расстояниями точки M от двух зафиксированных в плоскости, перпендикулярных друг к другу прямых ox и oy, назы-

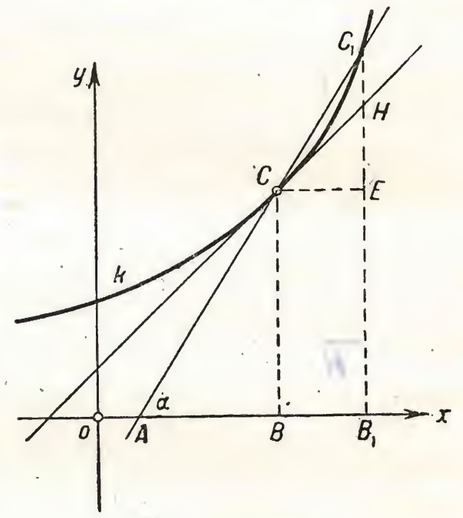


Уравнение кривой, прямой и окружности

ваемых о с я м и к о о р д и н а т. Кривая k на плоскости, рассматривавшаяся еще греками как г е о м е т р и ч е с к о е м е с т о т о ч е к, изучается теперь посредством уравнения, связывающего между собой переменные значения координат x и y точки M, описывающей эту кривую. Например, $y=x$ будет уравнением прямой a, проходящей через начало координат O и делящей угол xOy пополам; $x^2+y^2=k^2$ будет уравнением окружности b, имеющей центр в начале координат O и радиус, равный k. В общем виде

уравнение кривой k пишут $y=f(x)$ (y есть функция от x), что обозначает некоторую вполне определенную зависимость значений y от значений x.

Если теперь, следуя чертежу, данному еще Ньютоном в 1704 г. (первые начатки метода дифференцирования были им изобретены в 1665 г.), точка C имеет координаты x, y, а близкая ей точка C_1 — координаты $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, где Δx и Δy обозначают не произведения Δ на x или y, а п р и р а щ е н и я переменных x и y, то $\Delta x=\overline{CE}=\overline{BB_1}$ и $\Delta y=\overline{C_1E}=f(x+\Delta x)-f(x)$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, как наглядно видно, равно тангенсу угла $\alpha=\sphericalangle ECC_1$, который заключен между осью x и секущей $\overline{CC_1}$.



Касательная

Под тангенсом угла α ($\operatorname{tg}\alpha$), лежащего в прямоугольном треугольнике ABC (где угол при $B=90°$), понимают отношение $\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$, т. е. отношение катета $\overline{CB}$, лежащего против угла α, к гипотенузе $\overline{AB}$. Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha$ не зависит от в е л и ч и н ы самых сторон треугольника, а только от их о т н о ш е н и я. Его значение будет меняться только в зависимости от значения угла α, оно будет его ф у н к ц и е й.

Если теперь точку C_1 приближать по кривой k к точке C, то секущая $\overline{CC_1}$ будет стремиться к касательной $\overline{CH}$, как к своему пределу. Отсюда ясно, что и $\operatorname{tg}\alpha$ является п р е д е л о м отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,

$$\text{т. е. } \operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Мы изложили здесь точку зрения, выдвинутую в 1823 г. Коши и получившую затем название т е о р и и п р е д е л о в. Отыскание касательной сводится в ней к отысканию (при помощи алгебры) пределов отношения двух величин, стремящихся к нулю. Такие п е р е м е н н ы е стремящиеся к нулю величины называют п о т е н ц и а л ь н о бесконечно-малыми величинами. Эта точка зрения коренным образом отличается от точки зрения Лейбница, который признавал лишь а к т у а л ь н о бесконечно-малые величины, считая их завершенными, п о с т о я н н ы м и, отличными от нуля. Полу-

чаемый в результате вычисления предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ является уже новой функцией от x. Эту функцию называют производной от функции $y=f(x)$ и обозначают $y'=f'(x)$, а процесс ее получения—дифференцированием. Диференцируя снова функцию $y'=f'(x)$, мы получаем вторую производную $y''=f''(x)$, а затем таким же образом и производные высших порядков. Следуя Лейбницу, который одновременно с Ньютоном и независимо от него изобрел диференциальное исчисление, принято обозначать производную $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ еще символически упрощенно $\frac{dy}{dx}$. Здесь dy обозначает главную часть приращения Δy, значит $dy=\overline{ET}$, а $dx=\Delta x=\overline{CE}=\overline{BB_1}$. Таким образом, dx и dy являются переменными величинами, стремящимися вместе с Δx и Δy к пределу нуль. Их называют диференциалами и оперируют с ними так же, как и с другими переменными величинами. Значит, из отношения $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, имевшего первоначально лишь символическое значение, теперь законно следует, что $dy=f'(x)\cdot dx$.

Исходя из определения диференцирования $\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, можно вывести основные правила диференцирования (нахождение диференциала суммы и разности, произведения и частного двух функций, а также функции от функции) и составить таблицу диференциалов основных элементарных функций (степени, показательной функции и логарифма, тригонометрических и круговых функций, например, $d(x^n)=nx^{n-1}dx$, $d\ln x=\frac{1}{x}dx$, $d\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos^2 x}dx$, и т. д.). Тем самым мы получаем возможность найти диференциал и производную любой функции, составленной из конечного количества элементарных функций. Так, например, легко убедиться, что производная суммы двух функций равна сумме их производных. Нетрудно также вывести, что производная всякой постоянной величины равна нулю. Из обоих положений следует, что

$$d[f(x)+C]=df(x)+dC=f'(x)dx+0=f'(x)dx,$$

т. е., что $f(x)$ и $f(x)+C$ имеют одну и ту же производную $f'(x)$, каково бы ни было значение постоянной C.

В случае, когда переменная зависит от двух или нескольких независимых переменных, например $z=f(x, y)$, говорят о ее частных производных:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x_1 y)-f(x,y)}{\Delta y}=\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}=\frac{\partial z}{\partial y},$$

(причем употребляют особую букву ∂), а также о ее полном диференциале

$$dz=\frac{\partial z}{\partial y}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Диференцирование имеет громадное значение прежде всего потому, что оно непосредственно решает задачу определения скорости механического движения. Если t обозначает время и s пройденный телом путь, то $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ дает нам среднюю скорость за промежуток времени Δt, а $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$—мгновенную скорость в момент t. Поэтому, если известен закон движения $s=f(t)$, т. е. если известна зависимость пути от времени, нетрудно определить и скорость v, которая для неравномерного движения сама будет меняться в соответствии с временем $v=s'=f'(t)$. Аналогично мгновенное ускорение w будет выражаться $w=v''=s''=f''(t)$. Именно от понятия скорости исходил Ньютон, назвавший производные флюксиями (истечениями), в то время как Лейбниц исходил из диференциалов, которые он рассматривал как постоянные последние частицы, монады. Но и Ньютон наряду с флюксиями пользовался и флюэнтами—бесконечно-малыми. То обстоятельство, что бесконечно-малые рассматривались одновременно как равные нулю и как отличные от нуля, служило поводом для мистических тенденций.

Таким образом диференциальное исчисление своевременно разрешило задачу, поставленную перед ним развитием производительных сил, развитием всего естествознания и техники. Для этой «грандиозной эпохи, когда буржуазия сломила мощь феодализма», эпохи, которая «разрушила духовную диктатуру папства, воскресила греческую древность» и «разбила границы старого мира и впервые, собственно говоря, открыла землю» (Энгельс), именно диференциальное исчисление создало общий метод изучения кривых, построения к ним касательных и, главное, удовлетворило нужды механики и астрономии, сделав возможным вычисление скоростей и ускорений механического движения тел.

Но задача математики состоит не только в том, чтобы содействовать изучению механического движения,—она гораздо шире. Поэтому критика основных математических понятий, развившаяся благодаря теории множеств, была несомненно прогрес-

сивной. Она делала эти математические понятия независимыми от обыкновенного механического движения, снимком которого они явились. Она дала возможность развить их так, чтобы они могли обнять и более общие формы изменений, в том числе и такие, которые, будучи непрерывными, все же не допускают понятия мгновенной скорости.

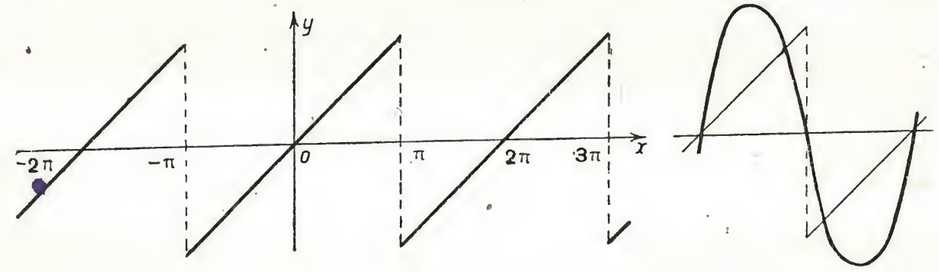
Особенно сильно сказалась эта критическая работа на таком важном математическом понятии, как понятие функции. Функциональная зависимость отражает объективные закономерности природы, присущие самим вещам, хотя в значительно менее глубоком виде, чем причинная зависимость, выявляя лишь количественную сторону связей и отношений, существующих в природе.

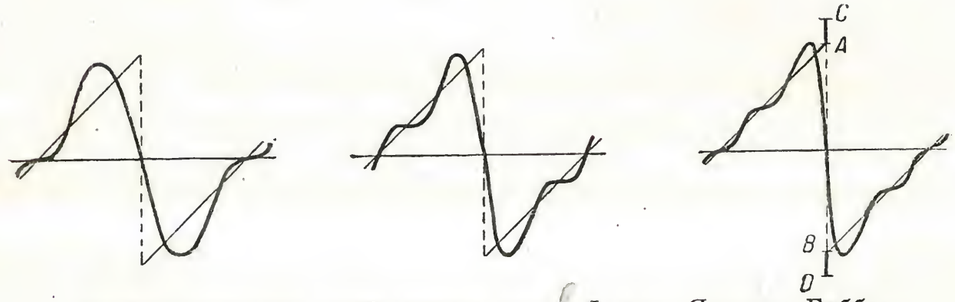
Возможность использования функциональной зависимости для описания связи между отдельными физическими, химическими и другими величинами сделала ее ценнейшим орудием научного исследования. Она позволяет на основе измерения, знания отдельных изменяющихся величин вычислить, а значит, и предвидеть другие их значения, которые не были непосредственно измерены, позволяет вывести новые, производные связи между величинами, новые закономерности. Вместе с тем то обстоятельство, что функциональная зависимость способна выразить количественную сторону разнообразнейших закономерностей природы, истолковывается феноменалистами, идеалистически настроенными естественниками и математиками так, будто в природе нет ни причины, ни следствия, будто существуют лишь одни функциональные соотношения и достаточно ограничиться их изучением, т. е. описанием, а не объяснением природных явлений.

Для современной математики развитие понятия функциональной зависимости и тех отделов математики, которые с ним оперируют, имеет громадное значение. Понятие функции—одно из самых основных понятий современной математики—не сложилось сразу; оно имеет по меньшей мере двухсотлетнюю историю; ее важной вехой явилась знаменитая «проблема колебания струны» в начале XVIII в.

Требовалось решить вопрос: если натянутую струну отклонить произвольно из ее положения равновесия, то можно ли это начальное положение колеблющейся струны охватить единой формулой? Вокруг этой проблемы разгорелся спор, в котором принимали участие все крупнейшие математики того времени, как-то: Иоганн и Даниель Бернулли, Эйлер, д'Аламбер, Лагранж, Фурье и др. Спор шел по следующим линиям. Одни ограничивались тем, что определяли функцию разного рода математическими выражениями, т. е. комбинацией математических символов и знаков. Другие полагали, что

кроме того следует изучать функции, которые определяются самой природой, т. е. эмпирически (опытно) полученной или произвольно начерченной кривой. Однако функция, определенная аналитически, т. е. математическим выражением, будет всегда ограничена теми известными нам правилами, которые соответствуют исторически данному уровню математических знаний. Поэтому возникают два вопроса: во-первых, имеет ли произвольное аналитическое выражение всегда геометрический смысл, во-вторых, может ли произвольно начерченная непрерывная кривая всегда быть представлена аналитическим выражением? В зависимости от той или иной точки зрения определялось и понятие функции. Так, д'Аламбер под функцией понимал произвольное аналитическое выражение, Эйлер же требовал изучения произвольно начерченных кривых.





Последовательные приближения рядом Фурье. Явление Гиббса

Лишь в 1807 г. Фурье открытием названных его именем тригонометрических рядов показал, что всякая произвольно начерченная линия, составленная из отрезков дуг различных кривых, может быть представлена единым аналитическим выражением[1]. Так, например, функция $y=f(x)$, равная x для всех x, принимающих значения от 0 до π, делающая при $x=\pi$ скачок с $y=\pi$ до $y=-\pi$, затем для всех x, имеющих значения от π

[1] $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+bn\sin nx)$,
где

до 3π, равная $x-2\pi$ и т. д., может быть представлена бесконечным сходящимся тригонометрическим рядом

$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + - \ldots\right).$$

Если этот ряд оборвать на первом, втором, третьем, четвертом и т. д. членах, то получатся приближения, все более примыкающие к $f(x)$.

Казалось, что открытием Фурье спор был решен навсегда в пользу Эйлера. Но на деле как раз после открытия Фурье вопрос еще более усложнился, и окончательно он не разрешен до настоящего дня. Однако начиная с того времени учение о функциях развилось в двух противоположных направлениях. Одно направление старается рассматривать функцию как нечто целое, охватывающее в единстве все ее части. Это направление создало теорию функций комплексного переменного. Другое направление—теория функций действительного переменного—рассматривает функцию как зависимость одних значений от других, не особенно заботясь о единстве функции в целом.

Наиболее ярко характеризует теорию функций комплексного переменного определение аналитической функции, данное Вейерштрассом. Аналитическая функция определяется единым процессом—разложением в ряды, которому она вся в целом удовлетворяет. Единая математическая формула, которая должна была, как полагал Эйлер, определять функцию где угодно, сообразно взглядам современных математиков определяет функцию во всей (хотя и ограниченной) области ее существования.

Наиболее ярко характеризует теорию функций действительного переменного определение функции, данное Лежен-Дирихле, которое гласит: «y есть функция переменного x на отрезке $a < x < b$, если всякому значению переменного x на этом отрезке соответствует вполне определенное значение переменного y, причем безразлично, каким способом установлено это соответствие».

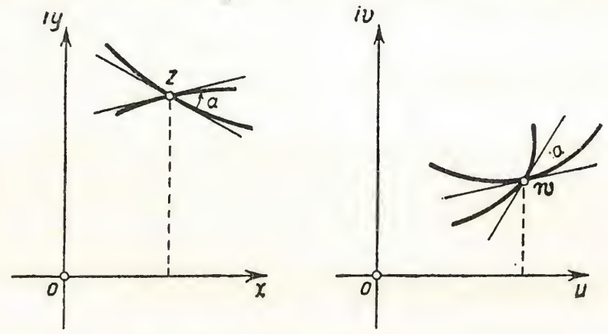
Начало теории функций комплексного переменного положил Эйлер, открывший в 1748 г. знаменитое тождество

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha$$

Лежен-Дирихле доказал сходимость рядов Фурье для всех функций $f(x)$, имеющих ограниченное количество максимумов и минимумов.

устанавливающее связь между показательной функцией e^x и тригонометрическими функциями $\sin x$, $\cos x$ посредством комплексной единицы i. После этого Коши пришел к заключению, что, только привлекая на помощь комплексные переменные, можно объяснить, почему знание функции в произвольно малом интервале дает возможность определить ее всю. Коши, рассматривал поэтому функцию $w = f(z)$, где как независимая переменная $z = x + iy$, так и зависимая переменная $w = u(x,y) + iv(x,y)$ являются комплексными, построив основы теории функций комплексного переменного. Аналитической в данной области Коши называет функцию $w = f(z)$, если она в этой области изменений переменной z однозначна и имеет производную $w' = f'(z)$. Оказывается, что тогда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны удовлетворять определенным условиям (дифференциальным уравнениям Коши—Риманна), из чего опять-таки вытекает, что u и v должны быть особым видом функций, так называемыми гармоническими функциями.



Конформное отображение

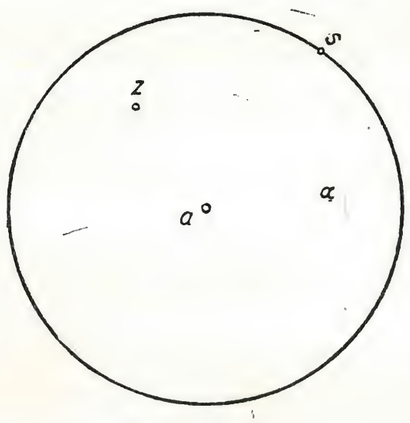
С геометрической стороны независимая переменная $z = x + iy$ представляет собой точку уже известной нам, введенной Гауссом комплексной плоскости (x, y), а зависимая переменная $w = u + iy$—точку другой комплексной плоскости (u, v). Таким образом, $w = f(z)$ представляет отображение плоскости (x, y) на плоскость (u, v). Но это отображение не может быть произвольным, поскольку должно быть выполнено уравнение Коши—Риманна. Можно показать, что это будет конформное отображение, т. е. такое, при котором две кривые a и b плоскости (x, y), пересекающиеся под каким-либо углом α, преобразуются в другие две кривые a_1 и b_1 в плоскости (u, v), пересекающиеся под тем же углом α. Если точка z описывает в плоскости (x,y) бесконечно-малую окружность k, то и точка w, отображающая ее, будет двигаться в плоскости (u, v) по бесконечно-малой окружности k_1 и в том же направлении. Конформность будет нарушаться лишь в отдельных, так

называемых особых точках, когда бесконечно-малая окружность k_1, описываемая точкой w, вырождается в точку.

Значения аналитической функции комплексного переменного в точках, лежащих внутри замкнутого контура, полностью определяются ее значениями на контуре[1]. Исходя отсюда, можно вывести все важнейшие свойства аналитической функции области и прежде всего получить ее разложение в ряд Тейлора вокруг любой точки a. Таким образом, получается бесконечный ряд

$$\mathfrak{P}(z-a) = k_0 + k_1(z-a) + k_2(z-a)^2 + \ldots,$$

сходящийся внутри круга α, имеющего центр в точке a и доходящего до ближайшей особой точки s.



Особая точка

Риманн, продолжая дело Коши, широко использовал геометрический метод. Для изучения многозначных функций им были введены названные его именем многолистные поверхности.

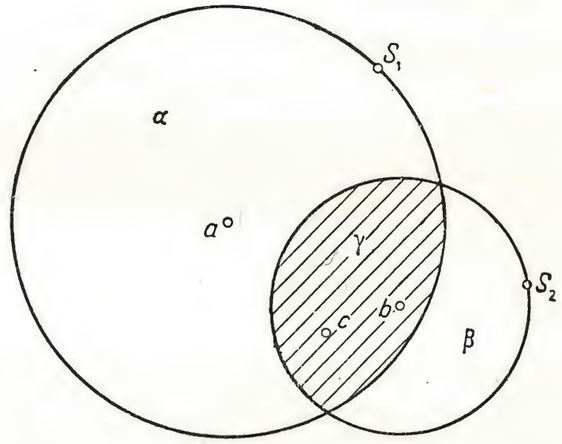
Идеи Коши и Риманна были завершены Вейерштрассом, который ввел новое понятие—так называемое аналитическое продолжение. Выбрав внутри круга сходимости α в качестве центра новую точку b, поближе к его периферии, можно получить ряд

$$\mathfrak{P}(z-b) = l_0 + l_1(z-b) + l_2(z-b)^2 + \ldots,$$

сходящийся внутри круга β. Если круги сходимости α и β пересекаются и если в общей им области γ имеется точка c, в которой совпадают значения обоих рядов $\mathfrak{P}(z-a)$ и $\mathfrak{P}(z-b)$ и всех их производных, тогда, оказывается, оба ряда в этой области γ тождественны. Вейерштрасс считает второй ряд аналитическим продолжением первого ряда (а также первый продолжением второго) и каждый из них элементом аналитической функции. Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока мы не наткнемся на естественную границу функции, которая определяется ее особыми точками. Таким образом, по Вейерштрассу, аналитическая функция определяется как совокупность аналитических продолжений. При этом, как это доказали Вольтерра и Пуанкаре, достаточно проделать счетное число таких аналитических продолжений, чтобы распространить функцию из одного элемента на всю естественную область ее существования.

[1] Это достигается с помощью так называемой интегральной формулы Коши, основанной на том, что интеграл аналитической функции не зависит от пути интегрирования.

Аналитические функции классифицируются в зависимости от характера и расположения их особых точек. Так, если функция имеет лишь одну бесконечно удаленную особую точку, т. е. если она разлагается в ряд Тейлора, сходящийся во всей плоскости, то ее называют целой функцией. Если при этом данный ряд имеет конечное количество членов, то это будет целая рациональная функция, если же он имеет бесконечное количество членов, — целая трансцендентная функция. В первом случае особая точка называется полюсом, во втором мы говорим о существенно особой точке. Функция, являющаяся отношением двух целых функций, называется мероморфной.



Аналитическое продолжение

Отправляясь от работ Вейерштрасса, ряд выдающихся математиков — Миттаг-Лефлер, Борель, Пикар, Адамар — создали новые методы, осуществляющие аналитическое продолжение, и занялись изучением аналитических функций вблизи их особых точек. Поведение однозначной аналитической функции вблизи существенно особой точки раскрывается в теореме Пикара. Она гласит, что в произвольно малой окрестности этой точки такая функция бесконечное число раз принимает любое конечное значение за исключением, быть может, какого-нибудь одного значения.

Одновременно с развитием общей теории аналитических функций развивались и ее ветви, разрабатывающие отдельные специальные функции, например, теория эллиптических функций, созданная Якоби и Вейерштрассом, теория автоморфных функций, построенная Клейном и Пуанкаре, и т. д.

Развитие теории функций комплексного переменного получило такой громадный размах благодаря многочисленным запросам со стороны естествознания — гидродинамики, теории упругости, небесной механики, теории электромагнетизма, а также ряда областей математики — теории

чисел, теории диференциальных уравнений (особенно линейных) и т. п.

За последние годы финским математиком Неванлинной была создана новая теория мероморфных функций. Далее, была развита теория аналитических функций многих переменных, и трудами Пенлеве изучено их поведение вблизи особой линии. Монтелем, Жюлия, Полиа и др. были применены качественные методы исследования аналитических функций, давшие ряд новых результатов, глубоко освещающих структуру функций.

Таким образом, теория функций комплексного переменного оказалась чрезвычайно плодотворной. Это еще больше укрепляло мысль, что определение функции путем аналитического продолжения, данное Вейерштрассом, является верхом совершенства. На самом деле, из этого определения само собой вытекает наиболее «загадочное» свойство функции, а именно: если она известна в малой области, то она известна вся. Далее, просто объясняются и такие странности, например, что ряд $1 - z^2 + z^4 - z^6 + - \ldots$ для $|z| < 1$ сходится, но для $|z| \geqslant 1$ расходится, хотя он получен делением из выражения $\frac{1}{1+z^2}$, которое сходится и для $z \geqslant 1$. Это происходит оттого, что функция $\frac{1}{1+z^2}$ для $z = +i$ имеет разрыв, а, значит, круг ее сходимости имеет радиус, равный $|i| = 1$. Известен парадокс, что существуют аналитические выражения (бесконечные ряды и бесконечные произведения), сходящиеся к разным функциям в разных областях, как, например, ряд $\frac{1+z}{1-z} + \frac{2z}{z^2-1} + \frac{2z^2}{z^4-1} + \frac{2z^4}{z^8-1} + \ldots$, который внутри круга $|z| = 1$ сходится к $+1$, а вне его к -1. Его объяснение вытекает из того, что между этими областями нарушена равномерная сходимость. Подобным же образом раскрылись и другие многочисленные парадоксы, например, почему $y = x^n$ при $\lim n = \infty$ дает непрерывную линию, но прерывную функцию и т. д.

Однако определение, данное Вейерштрассом, слишком суживало понятие функции. Законно поднялись критические голоса, требующие его расширения. Представим себе аналитическое выражение, определяющее однозначную аналитическую функцию $F_1(z)$ внутри определенной естественной области существования λ, ограниченной замкнутой линией l. Как указал Борель, его можно построить так, что оно будет сходиться равномерно и вне области λ, где оно, следовательно, будет определять другую аналитическую функцию $F_2(z)$. Согласно определению Вейерштрасса, $F_1(z)$ и $F_2(z)$ являются двумя существенно различными функциями, поскольку они непродолжаемы одна в другую. Между тем обе они даны одним и тем же аналитическим выражением, удовлетворяющим определенному алгебраическому или диференциальному уравнению. Значит, они являются по существу единой функцией, лишь искусственно разрезанной на две части линией l. После многолетних неудачных попыток Борелем была построена новая обобщенная теория аналитических функций, охватывающая и подобные случаи, не укладывающиеся в теорию Вейерштрасса. Подтверждение этой теории было дано в работах советских математиков, например Привалова. Бернштейн, а также Данжуа и Карлеман создали совершенно другие обобщения аналитических функций—так называемые квази-аналитические функции, оставаясь при этом в области действительного переменного. Всякая квази-аналитическая функция $f(x)$ определяется на всем отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, если она известна на какой-либо части этого отрезка.

Значительно позднее, чем теория функций комплексного переменного, развилась теория функций действительного переменного, эволюция которой целиком связана с расцветом теории множеств. Как уже сказано выше, эта теория исходит из определения функции Лежен-Дирихле, которое не обращает никакого внимания на аналитическое выражение, а рассматривает функцию как совокупность численных значений, совершенно не связанных между собой. Определение Лежен-Дирихле казалось также вполне совершенным. Исходя из этого определения, математики занялись изучением отдельных классов функций—непрерывных функций, монотонных функций, функций с ограниченным числом максимумов и минимумов, диференцируемых функций и т. д. Однако в самом конце прошлого века критики начали требовать ограничения определения Лежен-Дирихле. Согласно этому определению, безразлично, каким способом установлено соответствие между значениями независимого переменного x и значениями зависимого переменного y. Но если мы разобьем отрезок $a < x < b$ на бесконечное число отрезков $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ и определим функцию $y = f(x)$ так, что на отрезке δ_1 она совпадет с прямой l_1, на отрезке δ_2 со спиралью l_2, на отрезке δ_3 с параболой l и т. д., то можем ли мы рассматривать $f(x)$ как определенную функцию? Повидимому, мы имеем право на это только в том случае, если существует какой-то определенный закон выбора кривых $l_1, l_2, l_3, \ldots$—иначе ведь $f(x)$ не может быть задана. Против этого хода мыслей, высказанных Броденом, Борелем, Бером и Лебегом, возражают Цермело и Адамар. С точки зрения Адамара можно рассматривать и «лишенные закона» процессы как вполне определенные. Это имеет место, например, в кинетической теории га-

зов, где неизвестные скорости молекул все же считаются определенными. По Адамару, требование указать закон, определяющий функцию, аналогично требованию дать аналитическое выражение для функции (которое выдвигалось в XVIII в.) и, значит, является по существу реакционным. Наша точка зрения состоит в том, что мы можем рассматривать $f(x)$ как определенную функцию лишь тогда, когда закон, определяющий последовательность кривых l_1, l_2, l_3,... существует о б ъ е к т и в н о, независимо от того, в состоянии ли мы на данном уровне наших знаний произвести этот выбор или нет.

Дальнейшие глубокие исследования функций действительного переменного, основанные на теории множеств, были проведены Бером, Лебегом, Суслиным и др. Бер называет всякую непрерывную функцию $f(x)$ функцией класса 0. Функции, которые являются пределами сходящейся в каждой точке последовательности непрерывных функций $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, Бер называет функциями класса 1. К нему относятся, например, все функции с конечным количеством точек разрыва. Функции, являющиеся пределом сходящейся последовательности функций класса 1, являются функциями класса 2. Так, например, функция Дирихле $F(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} |\sqrt[m]{\sin n!\,\pi x}|$, равная 1 для всех иррациональных x и равная 0 для всех рациональных x, является функцией класса 2. Аналогичным образом можно получить функции все более высоких, в том числе и трансфинитных классов.

Лебег показал, что всякая функция, образованная к о н е ч н ы м или счетным числом аналитических действий (как-то: разложение в ряд, диференцирование, интегрирование), входит в классификацию Бера, т. е. может быть выражена посредством многочленов с конечным или счетным числом переходов к пределу. Одновременно Лебегу удалось доказать существование определенной функции, которая не входит в классификацию Бера. Московскими математики построен конкретный пример такой функции. Именно $f(x) = \lim_{y\to\infty} \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} P_{m,n}(x, y)$, где $P_{m,n}(x, y)$ многочлен от x и y и где переходы к пределу $m \to \infty$, $n \to \infty$ счетные, между тем как $y \to \infty$, непрерывный переход, является функцией, не входящей в классификацию Бера, если только многочлен $P_{m,n}(x, y)$ избран надлежащим образом.

Все новейшие исследования функций действительного переменного, осветив тонкую структуру функциональной зависимости, вместе с тем значительно осложнили вопрос о природе аналитического выражения. Среди современных математиков по этому вопросу, так же как и по всем важнейшим вопросам обоснования математики, нет единства; их мнения зависят от того или

другого философского направления, которого они придерживаются.

Теория множеств произвела особенно глубокие изменения в учении об и н т е г р а л е, этом чрезвычайно важном понятии математики. Интеграл служит, с одной стороны, для отыскивания функций по их производным, например, скорости по ускорению или пути по скорости и т. д., с другой стороны, для измерения площадей, объемов, масс, энергии и т. п., а также для вычисления средних значений функций.

Если требуется, например, вычислить массу прямого тонкого стержня (ab), плотность которого ρ, меняясь от места к месту, является функцией расстояния x от начала a, т. е. $\rho = f(x)$, то его разбивают на достаточно большое количество частей: (ax_1), (ax_2), ... , $(x_{n-1}\, b)$. Это дает возможность внутри каждой из этих n частей рассматривать плотность с известным приближением как постоянную величину, а именно соответственно: $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Тогда масса всего стержня будет приблизительно равна сумме произведений $s_n = \rho_1 \cdot (ax_1) + \rho_2 \cdot (x_1x_2) + \ldots + \rho_n \cdot (x_{n-1}\, b)$. Чем больше количество частей n, на которые мы разбили стержень, тем точнее полученный результат. Однако каким бы большим ни было n, а значит, какими бы малыми ни были части отрезка, все же плотность ρ будет и внутри их меняться от точки к точке, хотя и незначительно. Этим путем мы не сможем получить совершенно точный результат.

Чтобы свершить переход от этого приближенного результата к точному выражению, математика в своем историческом развитии создала три принципиально отличных метода.

Первый из них—это упомянутый уже метод «неделимых», относящийся к XVII—XVIII вв., к Кеплеру, Кавальери, Лейбницу, Якову Бернулли. Здесь допускается, что процесс дробления приводит к «последним» частицам, к а к т у а л ь н о бесконечно-малым, что отрезок—это сумма точек, площадь—сумма отрезков, тело—сумма площадей. Если, значит, (ax_1), (x_1x_2), ... актуально бесконечно-малые части, то понятно, что ρ_1, ρ_2, ... для каждой из них имеют лишь одно постоянное значение, и тогда сумма s_n будет точным выражением искомой величины. Лейбниц предложил обозначить эту сумму бесконечного количества бесконечно-малых частей символом $\int_a^b f(x)\,dx$, где dx обозначает бесконечно-малые части (ax_1), (x_1x_2), ... названные д и ф е р е н ц и а л а м и x, а $\int$ — начальную букву латинского слова сумма, в том начертании, как ее печатали в XVIII веке. Яковом Бернулли подобные суммы названы и н т е г р а л а м и. Если a и b заданные постоянные

числа, то мы называем интеграл определенным, число a—его нижней, число b—его верхней границей. Если же верхняя граница является переменной x, то $\int_a^x f(x)\,dx$ мы называем неопределенным интегралом; он будет сам какой-то функцией $F(x)$ от x. В таком случае мы обозначаем его $\int f(x) + C$, где C—так называемая постоянная интегрирования, которая, будучи произвольной, заменяет произвольность значения числа a в тождественном интеграле

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

В 1655 г. Ньютоном, а в 1673 г. независимо от него Лейбницем было сделано открытие, создавшее эпоху в развитии не только математики, но и всего естествознания и техники,—ими был открыт общий способ вычисления интегралов. Они установили, что нахождение интегралов является действием, обратным к уже освоенному действию дифференцирования (отыскания производной); если $F(x)$ имеет своей производной $f(x)$, то $F(x)$ является интегралом от $f(x)$.

Понятие интеграла строилось, таким образом, на понятии бесконечно-малых величин, на актуально бесконечном. Бесконечное понималось не как никогда не останавливающийся, развертывающийся процесс, а как нечто застывшее, как прекращение всякого движения. При этом, собственно говоря, актуально бесконечно-малые не встречались в самих математических выкладках; они служили для них лишь логической предпосылкой. Это обстоятельство важно отметить, ибо, оперируя актуально бесконечно-малыми, вряд ли можно было бы построить интегральное исчисление. Ведь актуально бесконечно-малые не подчиняются правилам обыкновенной арифметики. На самом деле, если разделить 1 на n частей, то как бы ни было велико число n, дробь $\frac{1}{n}$ всегда будет конечной, никогда не станет бесконечно-малой. Поэтому, если буквой α обозначить актуально бесконечно-малую величину, то нельзя будет указать такое конечное число n, чтобы произведение $n \cdot \alpha = a$ было конечным. Можно однако построить и арифметику актуально бесконечно-малых. Ей будет соответствовать и своя геометрия, не признающая одного из основных положений обыкновенной геометрии. Это положение, названное аксиомой Архимеда, хотя оно было известно Эвдоксу еще в IV в. до начала нашего исчисления, гласит: если даны два отрезка, меньший

α и больший a, то всегда можно указать такое конечное число n, чтобы $n \cdot \alpha > a$.

Изучение «неархимедовой геометрии», которым занимался главным образом Веронезе, показывает, что и при замене аксиомы Архимеда противоположной аксиомой может быть построена система геометрии, не приводящая к логическим противоречиям. Это убеждает нас в том, что все остальные геометрические аксиомы не зависят от аксиомы Архимеда.

Актуально бесконечно-малым величинам можно дать и наглядное истолкование, прибегнув, как это показал в 1908 г. Клейн, к известным еще в средние века «рогообразным углам». При этом измерение угла между двумя пересекающимися кривыми производится не посредством угла между касательными к ним в точке их пересечения, как это делается в обыкновенной геометрии, а посредством площади, заключенной между кривыми в окрестности точки их пересечения. С этой точки зрения угол между кривой и ее касательной не равен, как обыкновенно, 0; его приходится считать актуально бесконечно-малой величиной, и подчиняется он правилам особой арифметики.

Рогообразные углы

Невозможность получить переход от актуально бесконечно-малых к конечным величинам, невозможность использования актуально бесконечно-малых для интегрирования привела к противоречиям, к тому, что в начале XIX в. математики стали искать нового истолкования понятия интеграла. Новый метод создал в 1823 г. Коши, полностью отказавшись от актуально бесконечно-малых. Для того чтобы в нашем примере вычислить массу стержня, необходимо, руководствуясь его методом, поступить так: сначала попрежнему разобьем интервал (ab) на n частей и вычислим $s_n = \rho_1 \cdot (ax_1) + \rho_2 \cdot (x_1x_2) + \ldots + \rho_n \cdot (x_{n-1}\,b)$, получив таким образом некоторое приближение искомого результата. Потом увеличим количество частей с n до m и вычислим аналогично s_m, далее, увеличим m до p и вычислим s_p и т. д. Если при этом разности $s_m - s_n$, $s_p - s_m$ и т. д. будут все более и более уменьшаться, т. е. если с каждым новым делением на все большее количество частей получаемый результат будет все меньше и меньше изменяться, то мы будем говорить о существовании предела s последовательности чисел $s_n, s_m, s_p \ldots$, что запишем в виде $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Этот предел мы и будем называть интегралом. Таким образом, в интеграле Коши частицы, на которые дробится интервал (ab), остаются

всегда конечными, между тем как процесс дробления никогда не оканчивается.

С развитием этих идей, которые легли в основу разработанной в дальнейшем теории пределов, расширялось учение об интеграле. Была создана теория криволинейных интегралов, где приходится складывать частичные суммы, двигаясь не по отрезку (ab), а по кривой. Возникла теория кратных интегралов, поверхностных интегралов и т. п., где разбиваются на части не кривые, а пространственные области с двумя, тремя и т. д. измерениями и вычисляются соответствующие суммы. Последним этапом на этой ступени развития понятия интеграла является открытый в 1894 г. интеграл Стильтъеса. Стильтъес обобщил понятие интеграла, введя для измерения дробных частей области, в которой производится интегрирование, не величину этих частей, а какую-либо другую их функцию $\varphi(x)$, благодаря чему интеграл Стильтъеса принял вид $\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$. Это обобщение интеграла непредвиденно оказалось ценным пособием современной теории вероятностей и квантовой физики.

Третий подход к построению понятия интеграла дала теория множеств. Она заменила благодаря работам Бореля и Лебега теорию пределов теорией меры точечных множеств. Тем самым, так же как при обосновании дифференциального исчисления, была достигнута замена такого понятия, как предел—туманного, содержащего в себе момент изменения и не укладывающегося в рамки формальной логики, понятием статическим. Это произошло опять за счет противоречий, содержащихся в самой теории множеств. Но одновременно с этим достигнуто и значительное обобщение понятия интеграла; с непрерывных функций его удалось распространить и на функции прерывные.

Функции, имеющие лишь конечное количество разрывов, умел интегрировать еще Коши. Обобщение этого метода было дано в 1873 г. Риманном. Однако только в 1902 г., разработав теорию меры, Лебег расширил понятие интеграла на самые общие классы прерывных функций.

Рассматривая множество $\mathfrak{E}$ точек, содержащихся в интервале (ab), Лебег определяет сначала внешнюю меру этого множества. Для этого он строит совокупность интервалов $\mathfrak{T}_k$ так, чтобы они покрывали множество $\mathfrak{E}$, это означает, что каждая точка множества $\mathfrak{E}$ содержится хоть в одном из интервалов данной совокупности $\mathfrak{E} \subset \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{T}_k$. Построить такое

покрытие можно, вообще говоря, разными способами. Теперь для каждого из всех возможных покрытий $\mathfrak{G} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{T}_k$ он образует сумму их длин $S = \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathfrak{T}_k)$ и, наконец, выбирает нижнюю грань сумм S в качестве внешней меры множества $\mathfrak{E}$, обозначая ее $m_e\,\mathfrak{E}$.

После этого Лебег берет дополнительное к $\mathfrak{E}$ множество $\mathfrak{E}_1$, т. е. множество точек, лежащих в интервале (ab) и не принадлежащих к $\mathfrak{E}$. Для множества $\mathfrak{E}_1$ он находит его внешнюю меру $m_e\,\mathfrak{E}_1$. Наконец, он определяет для множества $\mathfrak{E}$ его внутреннюю меру $m_i\mathfrak{E}$ как разность между длиной всего интервала $(ab) = b - a$ и внешней мерой дополнительного множества $\mathfrak{E}_1$, т. е. $m_i\,\mathfrak{E} = b - a - m_e\mathfrak{E}_1$. В общем случае внешняя мера множества $\mathfrak{E}$ будет больше его внутренней меры, однако если обе меры окажутся равными, то множество $\mathfrak{E}$ называется измеримым множеством, и общее значение $m_e\mathfrak{E} = m_i\mathfrak{E} = \text{mes}\mathfrak{E}$ — его мерой. Очевидно, что если длину всего интервала (ab) сделать равной 1, то мера любого измеримого множества $\mathfrak{E}$, содержащегося в (ab), может колебаться от 0 до 1. Например, множество, состоящее из конечного количества точек, измеримо и имеет меру 0. Множество, состоящее из интервала, также измеримо и имеет своей мерой длину этого интервала. С линейных множеств эти понятия могут быть распространены и на множества точек в пространстве двух, трех и т. д. измерений. Введем, наконец, понятие измеримой функции, т. е. функции $y = f(x)$, значения y которой для x, лежащих в интервале (ab), составляют измеримое множество $\mathfrak{E}$. Тогда мерой множества y, т. е. mes $[\mathfrak{E}(y)]$ будет интеграл от $f(x)$. Это и есть новое определение интеграла.

Изменения, внесенные теорией множеств в понятие интеграла, очень глубоки. Как уже сказано, с точки зрения классической математики интеграл $\int f(x)\, dx$—это, с одной стороны, предел суммы, с другой стороны — первообразная функция $F(x)$, производная которой $F'(x) = f(x)$. Но оба эти понятия тождественны лишь тогда, когда $f(x)$ — непрерывная функция. Если же $f(x)$ прерывная функция, то не обязательно существование функции $F(x)$, имеющей $f(x)$ своей производной. Но даже когда $F(x)$ существует, то, как правило, ее нельзя отыскать путем прежних риманновских приемов интегрирования. Задача нахождения первообразной функции была решена лишь в 1910 г. Данжуа, чем был дан окончательный

ответ на этот вопрос, поставленный еще в конце XVII в. Ньютоном.

С другой стороны, можно отыскать интеграл от $f'(x)$ и в таких случаях, когда $f(x)$ не является производной: например, если $f(x)$ равна 0 для всех x, отличных от 0, и равна 1 для $x = 0$. Наконец, при интегрировании $\int f(x)\,dx$ можно получить функцию $F(x)$, не имеющую производной не только в нескольких отдельных точках, но даже в множестве точек, лежащих в любом интервале[1].

Таким образом, здесь вскрываются парадоксальные свойства интегрирования, аналогичные тем, которые мы приводили при дифференцировании. Впрочем, распространенное мнение, будто дифференцирование является более элементарным действием, чем интегрирование, можно признать лишь с известной оговоркой. Конечно, дифференцирование не выводит нас за пределы запаса уже известных нам функций, между тем как интегрирование в общем случае, выводя нас за эти пределы, с их помощью невыполнимо. Зато интегрирование непрерывных функций принципиально всегда возможно, но, как нам уже известно, не всегда существует производная от непрерывной функции.

Дальнейшие обобщения понятия интеграла идут по пути объединения идей Стильтъеса с идеями Лебега. Примером может послужить интеграл Радона (1913 г.), который приходится применять при решении следующей задачи из области термодинамики. Дано материальное тело, и известна закономерность, с которой его удельная теплота меняется от точки к точке. Требуется вычислить количество тепла, необходимого для нагрева этого тела на 1°. Тело D разбивают на небольшие части D_1, D_2, D_3, ..., в каждой из них выбирают по одной точке P_1, P_2, P_3, ..., затем в этих точках определяют удельные теплоты $c(P_1)$, $c(P_2)$, $c(P_3)$, ... и, умножая их на массы соответствующих частей тела $m(D_1)$, $m(D_2)$, $m(D_3)$ ..., а, затем складывая эти произведения, получают $c(P_1) \cdot m(D_1) + c(P_2) \cdot m(D_2) + \ldots$ Предел этой суммы и будет равен искомому количеству тепла

$$\int_D c(P)\,dm(D).$$

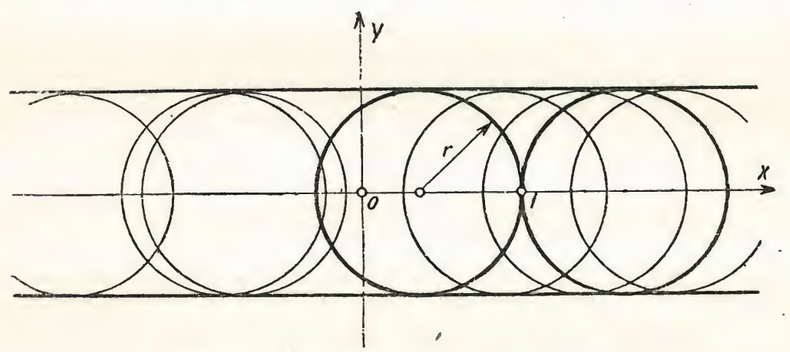
---

[1] Это, например, имеет место в случае, когда

$$f(x) = \frac{(x)}{1^2} + \frac{(2x)}{2^2} + \frac{(3x)}{3^2} + \ldots,$$

где (nx) обозначает так называемый избыток nx, равный разности между nx и ближайшим целым числом, но равный 0, если эта разность составляет $\frac{1}{2}$.

Не меньшее влияние, чем на дифференциальное и интегральное исчисления, теория множеств оказала и на теорию дифференциальных уравнений. Под дифференциальным уравнением мы понимаем уравнение, которое связывает независимую переменную и ее искомую функцию с производными этой функции. Говоря языком геометрии, дифференциальное уравнение выражает общие свойства целого семейства кривых. Оно имеет бесконечное множество решений, или, как говорят, интегралов. Каждое из них—это одна из кривых данного семейства. Так, например, дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{r^2}{y^2} - 1}$ имеет своим общим решением (интегралом) $(x-c)^2 + y^2 = r^2$,



Решения дифференциального уравнения.

где c—произвольная постоянная интегрирования. Это решение представляет окружности с радиусом r и центрами на оси x. Если кроме того заданы начальные условия, например, если требуется, чтобы интегральная кривая, удовлетворяющая данному дифференциальному уравнению, проходила через точку $(x = 1, y = 0)$, тогда из общего решения необходимо выделить частные решения. В нашем примере это будут две окружности, для которых $c = \pm(1 - r)$. Наряду с общими и частными решениями встречаются иногда особые решения дифференциальных уравнений. В приведенном нами примере существуют два особых решения. Это прямые $y = \pm r$, которые нельзя получить из общего решения, какое бы значение постоянной c мы ни придавали. Они представляют собой огибающие интегральных кривых.

Дифференциальные уравнения имеют огромное значение в естествознании и технике. В механике, в термодинамике, в теории электромагнетизма, в химии, везде, где изучается движение тех или других процессов, задача состоит сначала в составлении дифференциальных уравнений этих процессов, а затем и в их решении (интегрировании), которое дает в явном виде закономерности

этих процессов. Так, например, задача механики (в том числе и механики теории относительности) сводится к составлению дифференциальных уравнений движения, выражающих связь между ускорениями движущихся тел и действующими на них силами, и к интегрированию этих уравнений, дающему нам закон изменения пути, скорости, ускорения в зависимости от времени. Особо стоят кинетическая теория материи и современная квантовая физика, не ограничивающие свой математический аппарат дифференциальными уравнениями, а широко использующие статистические методы.

Но при всем громадном значении дифференциальных уравнений, при всем внимании к ним математиков лишь сравнительно немногие типы этих уравнений удается интегрировать (или, как говорят, свести к квадратурам), несмотря на то что принципиальная возможность решения их была доказана Пикаром. Поэтому издавна развились методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, относящиеся к практической математике, о которой речь будет впереди.

Кроме того Пуанкаре были разработаны так называемые качественные методы, дающие возможность исследовать дифференциальное уравнение и тогда, когда мы не умеем найти его решения. Их предметом является исследование общего характера функций, которые получились бы при решении данного дифференциального уравнения, наличия и расположения в этих функциях тех или других особых точек, периодических решений и т. п. Особенно важно определить, имеет ли данное уравнение периодические решения. Прежде всего это имеет значение для задач небесной механики, где известная «проблема трех тел», взаимно притягивающихся по закону обратных квадратов всеобщего тяготения Ньютона (например, солнце, земля, луна), не решается в общем случае и где требуется выяснить, устойчива ли данная система или нет.

Теория множеств создала и здесь могучие средства исследования, с одной стороны, благодаря перенесению в эту область методов теории функций действительного переменного, с другой стороны, благодаря использованию геометрических, именно топологических, методов. Нужно отметить, что работы по теории дифференциальных уравнений представляют в современной математике картину, характерную известной раздробленностью. Это происходит вследствие обилия встречающихся задач и разработанных частных методов их решений, а также благодаря тому, что все то, что могли дать идеи классического периода от Коши до Вейерштрасса, в значительной части уже использовано, между тем как новые методы еще недостаточно систематизированы. Из многочисленных достижений в этой области необ-

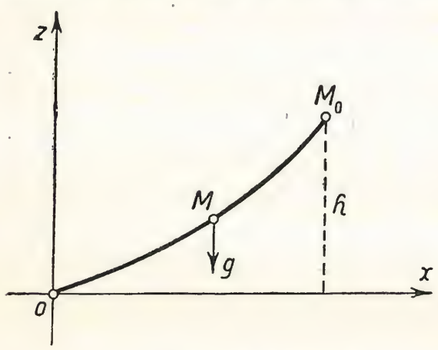
ходимо назвать и работы рано скончавшегося ленинградского математика Лаппо-Данилевского (1930). Для решения системы дифференциальных уравнений он применил аналитические функции от матриц.

Всесторонне разработана теория дифференциальных уравнений в частных производных, в особенности задачи с граничными условиями, имеющие громадное значение для математической физики. Типичным уравнением этого рода является уравнение теплопроводности в прямом цилиндрическом стержне: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где $u = f(x, t)$—это температура в сечении x стержня в определенный момент времени t и где a постоянная. Для однозначного решения этого уравнения должны быть даны: в качестве начальных условий функция $u = f(x, 0)$, при $t = 0$; в качестве граничных условий распределение температур (поведение u) на обоих концах стержня, например, когда температура на обоих концах поддерживается постоянной $f(0, t) = u_1$, $f(l, t) = u$. Такого рода задачи решаются как посредством квадратур, так и при помощи бесконечных рядов Фурье, методами гармонического анализа, относящимися к практической математике. К ним принадлежит и знаменитая задача Дирихле: в плоскости дана область D, ограниченная кривой Γ. Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую внутри области D уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (такие функции называют гармоническими) и принимающую на контуре Γ заданные значения. Значительный вклад в теорию этих уравнений, применяемых в гидродинамике и в учении об упругости, был внесен советскими математиками Мусхелишвили, Мюнцем, Гюнтером.

Дифференциальные уравнения известны с самого начала возникновения анализа, и до начала XX в. служили почти единственным орудием для решения задач математической физики, пока современная математика не построила для решения сложнейших проблем естествознания теорию интегральных уравнений. Правда, первое интегральное уравнение было составлено и решено еще в 1826 г. Абелем, но систематическая разработка теории интегральных уравнений была начата только в 1896 г. Вольтерра, продолжена в 1900 г. Фредгольмом, а затем над ней работали Гильберт и ряд других выдающихся современных математиков.

Абель пришел к интегральному уравнению при решении следующей задачи из области механики: в вертикальной плоскости требуется найти такую кривую, чтобы время t свободного падения по ней материальной точки (т. е. под влиянием одной лишь

земной тяжести) из данного положения на высоте $z = h$ до наинизшего положения на высоте $z = 0$ было заданной функцией от h, т. е. $t = f(h)$. Эта задача сводится к определению функции $\varphi(z)$ из уравнения $\int_0^h \frac{\varphi(z)}{\sqrt{h-z}}\,dz = f(h)$, где, как видно, неизвестная функция φ находится под знаком интегрирования. Это уравнение принадлежит к так называемым интегральным уравнениям первого рода типа Вольтерра, имеющим общий вид $\int_a^x K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$. Здесь a—величина постоянная, функции $K(x, y)$ (так называемое «ядро») и $f(x)$ заданы, а $\varphi(y)$ — неизвестная функция, которую требуется определить. Если вместо переменной x верхней границей в этом интеграле будет постоянная величина b, то налицо интегральное уравнение первого рода типа Фредгольма, решение которого представляет задачу значительно более трудную. Кроме того существуют и другие типы интегральных, а также интегро-дифференциальных уравнений.



Задача Абеля

Особенно важно интегральное уравнение второго рода типа Вольтерра:

$$\lambda \int_a^x K(x, y)\,\varphi(y)\,dy + f(x) = \varphi(x).$$

Здесь a и λ постоянные, $K(x, y)$, $f(x)$—заданные функции, φ—искомая функция, входящая как под знак интеграла, так и встречающаяся вне его. Такие уравнения можно решить всегда и при этом сравнительно легко. Но как раз к решению этих уравнений может быть сведено решение линейных дифференциальных уравнений, представляющее зачастую большие трудности. Это—один из наиболее часто встречающихся в математическом естествознании видов дифференциальных уравнений. Уже по одному этому очевидна громадная польза, приносимая интегральными уравнениями.

Если вместо переменной x верхней границей интеграла будет постоянная b, то получим интегральное уравнение второго рода типа Фредгольма. Подобные уравнения имеют решения только тогда, когда постоянная λ имеет определенные значения.

Эти значения λ называются собственными значениями или характеристическими числами, а соответствующие им функции φ—фундаментальными функциями. Задача нахождения характеристических чисел и фундаментальных функций встречается и в диференциальных уравнениях с граничными условиями, но лишь теория интегральных уравнений дает ее полное решение.

Интегральные уравнения решают многочисленные проблемы теории упругости, теплопроводности, теории электромагнетизма, волновой механики. Они позволяют количественно исследовать такие процессы, в которых, как это имеет место во многих сложных физических явлениях, необходимо учитывать всю предшествующую историю развития данного процесса. Сам Вольтерра применил интегральные уравнения к задачам теории органической эволюции, изучая посредством их, скажем, размножаемость двух сосуществующих видов, из которых один в борьбе за существование живет за счет другого. Полученные им результаты были подтверждены на опыте (например, по данным улова рыбы).

Интегральные уравнения относятся к сложной и весьма отдаленной от элементарной алгебры части анализа. Тем более замечательно, что между ними и обыкновенной системой линейных алгебраических уравнений существует тесная связь, открытая Фредгольмом в 1930 г. Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$:

$$\lambda \frac{b-a}{n}(k_{11}\varphi_1 + k_{12}\varphi_2 + \ldots + k_{1n}\varphi_n) + f_1 = \varphi_1,$$
$$\lambda \frac{b-a}{n}(k_{21}\varphi_1 + k_{22}\varphi_2 + \ldots + k_{2n}\varphi_n) + f_2 = \varphi_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda \frac{b-a}{n}(k_{n1}\varphi_1 + k_{n2}\varphi_2 + \ldots + k_{nn}\varphi_n) + f_n = \varphi_n,$$

где $k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{nn}; f_1, f_2, \ldots f_n; \lambda, a, b$ — заданные постоянные. Если n будет возрастать беспредельно, то решения этой системы окажутся (при соблюдении известных условий) вместе с тем и решениями интегрального уравнения

$$\lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy + f(x) = \varphi(x).$$

Таким образом, интегральное уравнение заменяет систему бесконечного количества алгебраических уравнений с бесконечным количеством неизвестных.

Теория интегральных уравнений получает необходимую общность и стройность лишь тогда, когда ядро $K(x, y)$ не является

уже непрерывной функцией от x, y, а допускает в соответствии с задачами, выдвигаемыми естествознанием, те или другие разрывы. Таким образом, входящие в уравнения интегралы приходится считать интегралами Стильтъеса и Лебега, а входящие в них функции функциями множеств, изучаемых в теории функций действительного переменного.

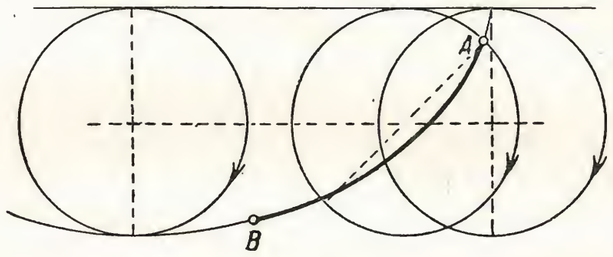
Самостоятельную главу теории интегральных уравнений представляет теория интегро-дифференциальных уравнений. Эти уравнения, где неизвестные функции содержатся как в явном виде, так и под знаками интегралов и производных, встречаются при изучении процессов, зависящих не только от состояния системы в данный момент времени, но и от всей предыдущей ее истории, т. е. там, где (в биологии, в теории изнашивания материалов и т. п.) мы имеем дело с явлениями наследственности. Работами Вольтерра (1913 г.) изучены линейные интегро-диференциальные уравнения, а отдельные классы нелинейных интегро-диференциальных уравнений решены Лихтенштейном (1931 г.) методом последовательных приближений.

Ознакомление с анализом было бы неполным, если бы оно не включало вариационного исчисления. В то время как в диференциальном и интегральном исчислениях функция, встречающаяся в той или другой задаче, рассматривается как имеющая хотя и неизвестную, но постоянную форму, в вариационном исчислении суть проблемы заключается именно в том, что самая форма функции меняется, варьирует.

Первая вариационная проблема была поставлена и решена, собственно, еще при самом зарождении анализа Ньютоном в его вышедшем в 1687 г. бессмертном труде «Математические начала натуральной философии». Это была задача о нахождении формы тела вращения, обладающего наименьшим сопротивлением при движении в жидкости. Однако толчок для систематического исследования вариационных проблем дала предложенная в 1696 г. Иоганном Бернулли задача о нахождении формы брахистохроны. Через две заданные точки A и B требуется провести кривую так, чтобы материальная точка M, падая по этой кривой свободно (т. е. под влиянием одной лишь земной тяжести), прошла от A до B в минимум времени. В следующем, 1697 году эта задача была одновременно решена Лейбницем и Яковом Бернулли. Такой кривой оказалась циклоида, кривая, описываемая точкой окружности при катании этой окружности по прямой.

Метод, примененный Яковом Бернулли, был найден пригодным и для решения других вариационных задач, в том числе и для поставленной им же так называемой изопериметрической проблемы. Эта проблема состоит в требовании указать

кривую, которая при заданном периметре дает максимум или минимум какого-то требуемого свойства (например, будучи замкнутой, заключает фигуру наибольшей площади). К изопериметрическим задачам относится и «задача Дидоны», взятая из римской мифологии. Дидона покупала такое количество земли, которое можно охватить шкурой вола. Она нарезала ремешки, концы закрепила на берегу моря и разместила ремешки так, чтобы охватить побольше земли. При прямом береге и равномерной стоимости земли ей необходимо было разместить ремешки по дуге окружности (в случае, если концы заданы) или полуокружности (если концы не заданы).



Брахистохрона (циклоида).

Иоганн Бернулли выдвинул третью основную вариационную проблему—задачу нахождения геодезической линии. Это—кривая линия, проходящая на кривой поверхности между двумя точками A и B так, что расстояние AB, измеряемое по этой линии, является минимальным. В самостоятельную ветвь анализа вариационное исчисление развил Эйлер, посвятив ему целую книгу (1744 г.). Но его методы требовали искусственных приемов, изобретаемых для каждой отдельной задачи. Лишь Лагранж в 1760 г. создал всеобщий метод, дающий вариационному исчислению солидный фундамент, правда, в то же время суживающий область его применения. В дальнейшем над усовершенствованием этого метода работали многие выдающиеся математики.

По своей форме вариационное исчисление являлось как бы продолжением тех задач на нахождение максимумов и минимумов, которые так занимали Ферма и математиков XVII в., задач, послуживших толчком для создания диференциального исчисления. Правда, сходство было больше внешнее. Хотя и тут и там некая переменная величина должна была принять экстремальное (т. е. максимальное или минимальное) значение, но там это зависело лишь от значения другой переменной величины, здесь же, в вариационном исчислении,—от бесконечного множества переменных величин, от формы, которую мы придали целой кривой, поверхности и т. п.

Причины, толкавшие математиков и естественников того времени на отыскивание минимальных и максимальных свойств геометрических образов, механических и физических процессов, лежали в их философских воззрениях. Под давлением греческой математики, в частности широко распространенных сочинений по механике Герона Александрийского, они искали в геометрических образах воплощения совершенства, в физических процессах проявления первопричины, действующей с мудрой целесообразностью. Эйлер в своем сочинении по вариационному исчислению писал: «Так как строение мира совершенно и обязано бесконечно мудрому создателю, то в мире не происходит ничего, что не проявляло бы каких-то свойств максимума или минимума. Значит, нет никакого сомнения, что возможно определить все явления вселенной через их последние причины посредством метода максимумов и минимумов с тем же успехом, как и через действующие причины». Таким образом, получилось, что закономерности, выведенные первоначально в качестве следствия из опытных данных, были затем под видом вариационных принципов (например, принципа кратчайшего пути, принципа наименьшего времени, принципа наименьшего действия и т. п.) поставлены в виде «начал» во главу угла механики, оптики и т. д. Этот образ мыслей ничем не отличается от числовой мистики пифагорийцев, считавших число сущностью вещей; шар, имеющий среди всех тел данного объема наименьшую поверхность,—наиболее совершенным телом; окружность, заключающую среди всех кривых (на плоскости) при данном периметре наибольшую площадь,—самой совершенной кривой, и т. д. Но по существу эти же идеи бродят и по наши дни в головах математиков и физиков-идеалистов, считающих своей задачей, исходя, вслед за Пуанкаре, из «принципа экономии мышления», отыскание наиболее «простых» закономерностей для явлений природы.

Так же как и другие ветви анализа, вариационное исчисление получило «строгое» обоснование лишь в 70-х годах прошлого века в трудах Вейерштрасса и Дарбу, которыми были завершены работы по исследованию условий применимости методов Эйлера—Лагранжа. Тем самым был закончен классический период развития вариационного исчисления, когда задача отыскания экстремума интеграла сводилась к отысканию функций, удовлетворяющих соответствующим диференциальным уравнениям.

Но так как теория диференциальных уравнений, как мы уже говорили, дает возможность решать эти уравнения лишь в исключительных случаях, то вариационное исчисление оказалось довольно беспомощным, особенно перед лицом задач, выдвигаемых естествознанием и техникой. Отсюда понятно, что возникла потребность создать для вариационного исчисления свои

собственные методы, не зависящие от теории диференциальных уравнений. Эту потребность удовлетворили так называемые «прямые методы», основы которым в новейшее время положили Гильберт, Лебег, Курант, Кнезер, Каратеодори, Адамар, Тонелли и др., совершив в известном смысле возврат к приемам Эйлера, но обогатив их результатами, вытекающими из современной теории множеств. В этом направлении, имеющем в свою очередь ряд ответвлений, мы находим и крупные работы советских математиков—Размадзе, Лаврентьева, Люстерника, Шнирельмана, Степанова, Петровского и др.

Теория интегральных уравнений и вариационное исчисление положили в свою очередь начало новой, самой молодой области анализа — функциональному анализу. Как уже сказано выше, вариационное исчисление и теория интегральных уравнений рассматривают функции переменной формы, а следовательно, и выражения, значения которых зависят от переменной функции. Такие выражения называются функционалами. Так, например, интеграл

$$I(f) = \int_a^b F\left(x,\ f,\ \frac{df}{dx}\right) dx,$$

где a, b—данные постоянные числа и F—заданная функция, зависящая, во-первых, от независимого переменного x, во-вторых, от его функции $f = f(x)$, форма которой меняется, и, в-третьих, от производной этой функции $\frac{df}{dx}$, — является функционалом, так как его значение определяется в зависимости от того, какова форма функции f. С другой стороны, функциональный анализ изучает так называемые операторы, т. е. выражения, преобразующие одну функцию в другую.

Важнейшим средством является здесь так называемое функциональное пространство Гильберта $\mathfrak{R}$. Оно построено на далеко идущей аналогии между обыкновенными векторами с их алгеброй линейных преобразований и квадратичных форм и между требованием представить произвольно взятую функцию в виде линейной комбинации заданных функций. «Точками» пространства $\mathfrak{R}$ являются функции с интегрируемым квадратом на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Последовательность точек f_n имеет предельную точку f, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f - f_n)^2\, dx = 0.$$

«Расстояние» между двумя функциями f и g устанавливается выражением

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f-g)^2\,dx},$$

угол между этими функциями

$$\cos\alpha = \frac{\int_a^b fg\,dx}{|f|\cdot|g|}.$$

Отсюда следует, что ортогональными функциями (т. е. когда угол между ними равен 90°) будут считаться такие, для которых

$$\int_a^b fg\,dx = 0.$$

Последовательности таких функций имеют громадное значение в анализе. Простейший пример представляет последовательность тригонометрических функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,$$

в интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, которые вдобавок нормированы, так как норма любой из них $\int_0^{2\pi} f^2 dx$ равна 1.

С операторами мы встречаемся в самых различных областях математики. Простейшие операторы—это конечная разность $R(f, x) = f(x+1) - f(x)$ или, например, производная $D(f, x) = \frac{df(x)}{dx}$. Из операторов наиболее изучены линейные операторы, обладающие свойством, при котором $F(f+g, x) = F(f, x) + F(g, x)$ и $F(cf, x) = cF(f, x)$, где c—произвольное число. Посредством операторов решаются, например, дифференциальные уравнения. Так, уравнение $\frac{dy}{dx} - ay = 0$ пишут символически в виде $(D-a)y = 0$, где $D = \frac{d}{dx}$. Отсюда получают, следуя формальным правилам алгебры, $y = \frac{1}{D-a}\cdot 0$. Наконец, выражение $\frac{1}{D-a}$ превращают в бесконечный ряд, а именно, следуя Форсайту,

$$\frac{1}{D-a} = -\left(\frac{1}{1-D/a}\right)\cdot\frac{1}{a} = -\left\{1 + \left[\frac{1}{a}D\right] + \left[\frac{1}{a}D\right]^2 + \ldots\right\}\cdot\frac{1}{a},$$

или, следуя Хевисайду,

$$\frac{1}{D-a} = \left(\frac{1}{1-a/D}\right)\cdot\frac{1}{D} = \left\{1 + [aD^{-1}] + [aD^{-1}]^2 + \ldots\right\}\cdot D^{-1},$$

а затем снова возвращаются от символов к их первоначальному смыслу. Так, во втором случае получим

$$y = \left\{1 + [aD^{-1}] + [aD^{-1}]^{-2} + \ldots\right\}\cdot D^{-1}\cdot 0 =$$
$$= D^{-1}\cdot 0 + aD^{-2}\cdot 0 + a^2D^{-3}\cdot 0 + \ldots =$$
$$= \int 0\,dx + a\int\int 0\,dx\,dx + a^2\int\int\int 0\,dx\,dx\,dx + \ldots =$$
$$= C\left\{1 + ax + \frac{a^2x^2}{2} + \ldots\right\} = Ce^{ax}.$$

В то время как в конце прошлого века функциональный анализ развивался преимущественно с помощью алгебраических методов, в настоящий период, под влиянием теории множеств, в нем господствуют геометрические методы, основанные на новом развитии понятия пространства.

На протяжении всей этой главы мы уже называли ряд советских математиков, имеющих в области анализа выдающиеся работы. В дополнение укажем на работы Смирнова, Лаврентьева, Гончарова в области теории функций комплексных переменных, а также Привалова, Берманта и Меньшова, пользующихся здесь же геометрическими методами. В теории функций действительного переменного наиболее тонкие результаты—в так называемой дескриптивной теории функций—достигнуты Новиковым, Келдыш и Канторовичем. Отдельно стоят работы Фихтенгольца и его учеников.

Особо нужно отметить разработку проблем анализа, связанных с задачами теоретического естествознания и техники. Уравнения теории упругости исследуются Смирновым, Соболевым, Мусхелишвили, в этой же области блестящие результаты получены Мюнцем. Тихоновым изучаются уравнения теплопроводности, Франклем—типы дифференциальных уравнений аэродинамики, Гюнтером—классические задачи математической физики и т. д.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

Формирование современной геометрии.—Проективная геометрия, несобственные элементы, принцип взаимности.—Геометрия Лобачевского—Больяи, эллиптическая и сферическая геометрии.—Аксиоматический метод в геометрии, интерпретации.—Мнимости в геометрии.—Абсолютная геометрия, многомерные геометрии.—Дифференциальная геометрия.—Нериманновы геометрии.

Те же характерные для современной математики черты, вытекающие из высшей ступени абстракции, на которую она поднялась, выражены, пожалуй, еще более ярко в геометрии, чем в арифметике, алгебре и анализе.

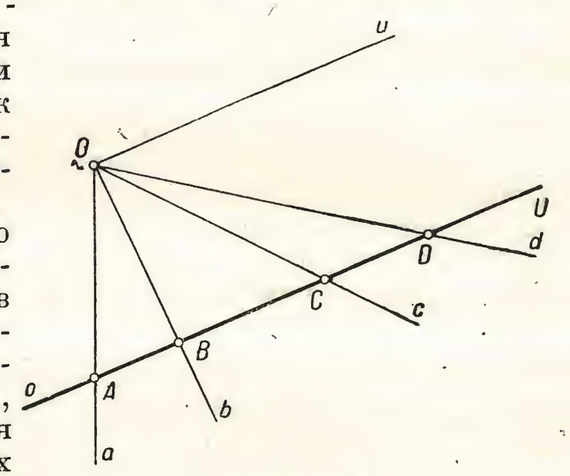
Пространственные формы действительного мира, которые изучает геометрия, отличаются от чисто количественных отношений (являющихся предметом математики в узком смысле слова) сравнительно большей вещностью. Они воспринимаются нами не только как логические закономерности, но и как наглядные пространственные образы. Именно поэтому всякое существенное изменение, вносимое в геометрию, до основания преобразовывает ее и легко бросается в глаза. Отсюда понятно, что геометрия наших дней, выросшая и продолжающая и теперь формироваться под влиянием новых абстрактных методов, мало похожа на геометрию Эвклида.

Глубокие изменения, которые претерпела геометрия, были подготовлены всем ее развитием, особенно в XIX в. К 1822 г.—ко времени выхода в свет книги Понселе—относится создание проективной геометрии как целостной дисциплины. Этим была завершена работа, начатая Дезаргом еще в XVII в. под влиянием архитектуры периода Возрождения, нуждавшейся

в развитии учения о перспективе, и продолженная затем виднейшими геометрами эпохи французской революции—Паскалем, Монжем и др.

Проективная геометрия отличается от геометрии древних, во-первых, тем, что она вводит несобственные, или бесконечно-удаленные элементы, и, во-вторых, тем, что в ней господствует принцип взаимности.

Известно, что две прямые a и b, лежащие в одной плоскости, как правило, пересекаются в общей им обеим точке C. Однако есть и исключение: прямые a и b не имеют общей точки, будучи параллельными. Так образуются в геометрии Эвклида одни теоремы, относящиеся к этому «правильному» случаю, и другие—к исключению из него.



Проективность

Аналогично обстоит дело и тогда, когда мы не ограничиваемся геометрией в плоскости, а изучаем элементы трехмерного пространства. Так, например, плоскость α и не лежащая в ней прямая b в одних случаях определяют точку пересечения C, в других же случаях они параллельны. Чтобы избавиться от подобной двойственности, Дезарг ввел понятие несобственной точки, рассматривая параллельные прямые как сходящиеся тоже в одной какой-то точке, но бесконечно-удаленной. Подобным же образом вводятся и понятия несобственной прямой и несобственной плоскости. Тогда теоремы геометрии (но, конечно, лишь те, в которых понятие параллелизма не играет никакой роли) получают максимальную общность, не зная никаких исключений.

Свойства геометрических образов, в которых нет надобности делать какое-либо различие между пересекающимися и параллельными прямыми (т. е., по Дезаргу, между собственными и несобственными элементами), называются проективными свойствами. Свойства, в которых между собственными и несобственными элементами делают различие (т. е. свойства, связанные с понятиями параллелизма, измерения отрезков и углов, их равенства, перпендикулярности, подобия фигур), называют метрическими свойствами, и их изучает не проективная, а метрическая геометрия.

Основными операциями проективной геометрии являются п р о е к т и р о в а н и е и с е ч е н и е. Так, например, прямолинейный ряд точек A, B, C, D,...U,... проектируется из точки O, не принадлежащей к этому ряду, в результате чего получается пучок лучей $a,b,c,d,...u,...$ Наоборот, пучок лучей $a,b,c,d,...u,...$ сечется прямой o, не принадлежащей к этому пучку, в результате чего получается прямолинейный ряд точек $A,B,C,D,..U,...$ С помощью этих двух операций можно построить всю проективную геометрию, целиком обходясь без понятия измерения. Это и было в отличие от не совсем последовательной французской школы проведено немецкой школой во главе со Штаудтом (1847 г.).

Построив систему проективной геометрии, мы замечаем, что все теоремы геометрии в плоскости можно разбить на две группы. Если в любой теореме одной группы мы заменим слово «точка» словом «прямая» и слово «прямая» словом «точка», то, произведя вдобавок несколько небольших чисто грамматических изменений (вместо «пересекаться» и «соединять» будем писать «определять», вместо «лежать на» и «проходить через»—«принадлежать»), мы получим соответствующую теорему второй группы. Так, например,

теореме:	соответствует теорема:
«Две точки определяют единственную прямую, принадлежащую им обеим»	«Две прямые в плоскости определяют единственную точку, принадлежащую им обеим».

Это поразительное свойство называют п р и н ц и п о м в з а и м н о с т и для плоскости. Он является следствием более общего принципа взаимности для пространства, согласно которому в теоремах проективной геометрии могут обмениваться местами понятия «точка» и «плоскость». Например,

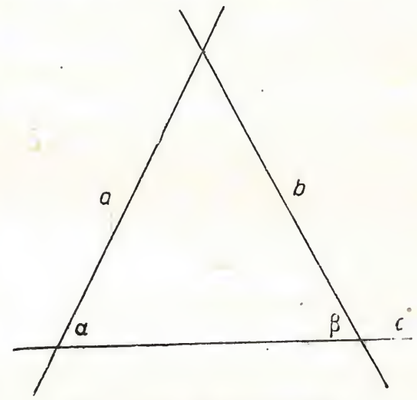
теореме:	соответствует теорема:
«Две точки определяют единственную прямую, принадлежащую им обеим»	«Две плоскости определяют единственную прямую, принадлежащую им обеим».

Наконец, из этого же принципа взаимности для пространства можно вывести еще и принцип взаимности для связки (т. е. для прямых и плоскостей, проходящих через общую точку). Например,

теореме:	соответствует теорема:
«Две прямые определяют единственную плоскость, принадлежащую им обеим»	«Две плоскости определяют единственную прямую, принадлежащую им обеим».

Проективная геометрия строится, как и геометрия Эвклида, в виде цепи логических выводов из определенной системы начальных положений, или а к с и о м. Поэтому понятно, что взаимность теорем происходит потому, что благодаря введению несобственных элементов взаимны самые аксиомы проективной геометрии. Однако это лишь формальное объяснение. Оно не отвечает на вопрос, почему теорема, высказанная о точке, верна и для плоскости, ведь точка и плоскость резко отличаются друг от друга как в объективном мире, так, следовательно, и в нашем сознании, в пространственном представлении. Между тем это происходит потому, что сами понятия точки, прямой и т. д. меняются, наполняются новым содержанием. Чтобы лучше понять это, мы должны поставить вопрос о сущности аксиом геометрии вообще, о их связи с предметом геометрии, о геометрическом методе.

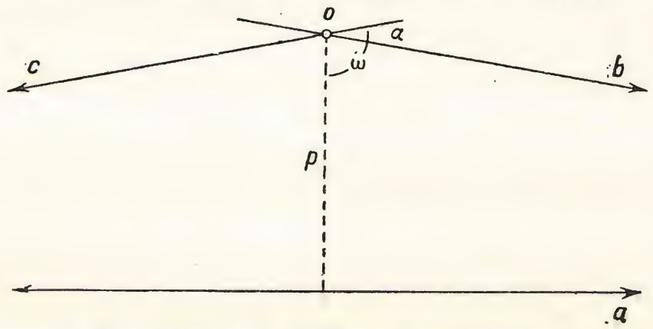
Этот вопрос был подготовлен и второй, возникшей в XIX в., предпосылкой современной геометрии— н е э в к л и д о в ы м и г е о м е т р и я м и. Непосредственным поводом для их создания были известные еще из древности попытки доказать аксиому, называемую также V постулатом Эвклида. Этот постулат гласит: если две прямые a и b пересекают третью прямую c так, что сумма внутренних углов α и β, лежащих по одну сторону прямой c, меньше двух прямых углов, то прямые a и b пересекаются по ту сторону прямой c, где находятся углы α и β.



V постулат Эвклида

Попытки вывести этот постулат из других аксиом геометрии Эвклида оказались тщетными. В лучшем случае это были «доказательства», незаметно использующие те или другие следствия того же постулата, т. е. основанные на логически недопустимом «порочном круге». Зато именно благодаря этим неудачам было обнаружено, что из V постулата вытекает ряд других предложений, например: «для любой геометрической фигуры всегда существует подобная фигура произвольной величины», «сумма внутренних углов в треугольнике равна двум прямым», «через точку O, лежащую вне прямой a, можно провести к этой прямой только одну параллельную прямую b», «перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой (в плоскости) всегда пересекаются», «через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность» и многие другие. Таким образом, был сделан значительный шаг в деле изучения связей между положениями геометрии.

Благодаря этой подготовительной работе, длящейся на протяжении 2000 лет, к концу XVIII в. геометры сумели поставить вопрос по-новому: если построить систему геометрии, пользующейся не V постулатом, а, наоборот, другими, допускающими проведение д в у х различных параллелей из точки O, лежащей вне прямой a, придем ли мы к логическому противоречию? В начале XIX в. был дан отрицательный ответ на этот вопрос. Была построена непротиворечивая система неэвклидовой геометрии. Тем самым было доказано, что V постулат не зависит от других аксиом эвклидовой геометрии. Вытекающие из него утверждения о пространстве не являются просто логической необходимостью, а должны быть объяснены самими свойствами пространства; утверждение Канта об априорности геометрических понятий не имеет под собой почвы.



Параллельные Лобачевского-Больяи

Первым открыл существование неэвклидовой геометрии Гаусс (1816 г.), однако из-за боязни расшевелить «осиное гнездо» предубежденных современников он не опубликовал этого своего открытия. Не зная об этом, почти одновременно и независимо друг от друга, Н. И. Лобачевский в Казани (1829 г.) и Больяи в Венгрии самостоятельно открыли и опубликовали новую неэвклидову геометрию, в которой V постулат Эвклида был ими заменен следующим: «Через точку O, лежащую вне прямой a, можно провести к этой прямой две параллельные прямые b и c». Здесь под параллельными прямыми подразумеваются две прямые, п о г р а н и ч н ы е между прямыми, пересекающими прямую a (все они лежат вне угла α) и не пересекающими ее (все они лежат внутри угла α).

Понятно, что геометрия Лобачевского—Больяи отличается от геометрии Эвклида не только этим постулатом. Это отличие выявляется и во всех тех теоремах, которые строятся на этом постулате. Так, мы получаем теорему: сумма углов α, β, γ треугольника меньше двух прямых. При этом оказывается, что разность $\delta = 180° - (\alpha+\beta+\gamma)$, называемая д е ф е к т о м, будет тем больше, чем больше будет площадь данного треугольника.

Отсюда мы приходим к выводу, что в геометрии Лобачевского—Больяи существует абсолютная мера расстояний (в то время как в геометрии Эвклида существует лишь абсолютная мера для углов—это полный угол=360°) и выражающие длины отрезков числа не складываются по законам обыкновенной арифметики. Далее выясняется, что «угол параллельности» ω, т. е. угол между перпендикуляром p и параллельной прямой b, уменьшается до нуля, если p возрастает до бесконечности, и что ω увеличивается до 90°, если p уменьшается до нуля[1] (в геометрии Эвклида ω не зависит от p, равняясь всегда 90°). Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, не всегда возможно провести окружность.

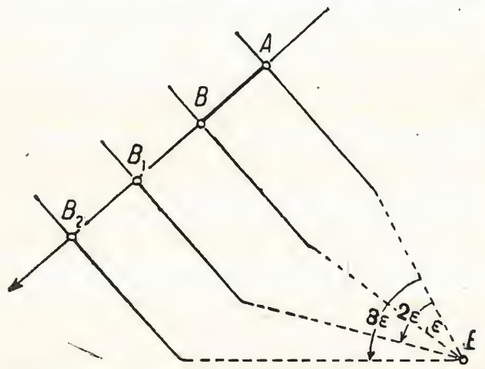
Все эти положения настолько необычны, что нет ничего удивительного в том, что Лобачевский и Больяи натолкнулись на непонимание и насмешки своих современников. Против их геометрии выдвигалось прежде всего возражение, будто она противоречит опыту, наглядным представлениям, получаемым непосредственно нашими восприятиями. Они якобы учат нас тому, что к данной прямой можно провести всегда только одну параллельную.

Однако наши пространственные восприятия не обладают абсолютной точностью: они лишь приблизительно отображают пространственные отношения материального мира. В самом деле, из точки O, лежащей от прямой a на расстоянии p, проведем прямую b, не пересекающую a, а затем вторую прямую c, отклоненную от b на такой малый угол α (например, $\alpha = 0{,}001''$), что прямые b и c нельзя будет различить. Тогда мы не будем также в состоянии сказать, является ли b единственной параллельной к a или этим же свойством обладает и прямая c. К тому же результату можно притти, избрав точку O на громадном расстоянии p (например, p=расстоянию от Земли до туманностей) от прямой a, когда всякая наглядность теряет свои права. Таким образом, наглядность не может быть судьей в вопросе, какая из обеих геометрий—эвклидова или неэвклидова—вернее отображает действительность. Для ограниченных областей пространства обе геометрии неразличимы, ибо, соответственно избрав произвольную постоянную, которая входит во все формулы неэвклидовой геометрии, можно добиться того, чтобы угол α был сколь угодно малым, если расстояния точки O от прямой a имеют обычные для нашей практики величины. Таким образом, мы убеждаемся, что возражения против неэвклидовой геометрии, пытающиеся опереться на наглядность, несостоятельны.

---

[1] Перпендикуляр p и угол параллельности ω связаны формулой $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = e^{\frac{-p}{\rho}}$, где ρ—произвольная постоянная. Если $\lim \rho = \infty$, то $\omega = 90°$.

В 1854 г. Риманн построил другую систему неэвклидовой геометрии, отличную от геометрии Лобачевского—Больяи. В этой геометрии из точки O, находящейся вне прямой a, нельзя провести к ней ни одной параллельной прямой. Отсюда следует, что все прямые на плоскости пересекаются. Как и геометрия Лобачевского—Больяи, геометрия, построенная Риманном, несовместима с V постулатом Эвклида. Но в отличие от нее она нарушает еще и другое положение, общее этим обеим геометриям. Действительно, в этой геометрии сумма углов треугольника больше двух прямых, как это видно из треугольника ABE, где прямые $\overline{AE}$ и $\overline{BE}$ являются перпендикулярами к отрезку $\overline{AB}$. Однако нетрудно доказать, что если сумма углов треугольника больше двух прямых, то аксиома Архимеда будет нарушена.



Геометрия Риманна

Построим перпендикуляры в концах отрезка $\overline{AB}$. Согласно положению, поставленному Риманном в основу его геометрии, они пересекутся в точке E, являющейся вершиной треугольника ABE, в котором угол $\sphericalangle AEB$ обозначим ε. Отложим, продолжая отрезок $\overline{AB}$, равный ему отрезок $\overline{BB_1}$ и соединим B_1 с E. Треугольники ABE и BB_1E будут равны (так как $\overline{AB}=\overline{BB_1}$, $\overline{BE}=\overline{BC}$, $\sphericalangle ABE=\sphericalangle B_1BE=90°$), откуда следует, что и $\sphericalangle BEB_1=\sphericalangle AEB=\varepsilon$, а значит, $AEB_1=2\varepsilon$. Точно так же, построив на продолжении отрезка $\overline{BB_1}$ равный ему отрезок $\overline{B_1B_2}$, найдем, что $\sphericalangle AEB_2=3\varepsilon$. Повторяя этот процесс n раз, дойдем до точки B_{n-1}, причем $\sphericalangle AEB_{n-1}=n\varepsilon$. Но согласно известной уже нам аксиоме Архимеда, как бы мал ни был угол ε, всегда можно избрать число n так, чтобы $n\varepsilon$ было больше, чем любое сколь угодно большое число, а значит, и так, чтобы $n\varepsilon$ было больше 180°. В случае однако, если мы изберем для n наименьшее число, делающее $n\varepsilon>180°$, точка B_{n-1} попадет внутрь отрезка $\overline{AB}$, т. е. прямая окажется замкнутой линией. Поэтому в геометрии, созданной Риманном, приходится или отказываться от аксиомы Архимеда, допуская существование актуально бесконечномалых, или же—и так поступил сам Риманн—считать прямые замкнутыми линиями, обладающими конечной длиной. Теми же свойствами обладают и прямые знакомой уже нам проективной геометрии благодаря введению в нее несобственных элементов.

Возражения против геометрии Риманна от «здравого смысла», от «наглядности» опять-таки мало доказательны. И в формулах этой геометрии выступает произвольная постоянная, которая может быть избрана так, что для конечной области пространства теоремы геометрии, построенной Риманном, будут лишь как угодно мало[1] отличаться от теорем геометрии Эвклида.

Но кроме возражений, выдвигаемых против геометрии Лобачевского—Больяи, против концепции Риманна выдвигается еще одно серьезное возражение. Раз геометрия, по Риманну, знает только конечные прямые, а значит, и конечные плоскости, то в этой геометрии и все пространство имеет конечные размеры. Однако в своей знаменитой работе «О гипотезах, лежащих в основе геометрии» Риманн проводит различие между понятиями «безграничность» и «бесконечность», которые обычно принято смешивать. Он показывает, что безграничность является неотъемлемым свойством пространства, ибо невозможно существование какой-то границы, за которой уже не было бы пространства. Что же касается конечности или бесконечности пространства, то Риманн считает, что эти понятия строятся на понятии измеряемости и не связаны необходимым образом с понятием безграничности. В качестве примера безграничного, но конечного пространства двух измерений он приводит поверхность шара. Перемещаясь по поверхности шара, мы нигде не наталкиваемся на границу, а вместе с тем эта поверхность все же имеет конечные размеры.

Против этой аргументации Риманна выдвигались добавочные возражения, а именно, будто конечное безграничное пространство двух измерений нам нетрудно мыслить только потому, что оно вмещено в трехмерное пространство и, следовательно, может быть даже наглядно представлено. Существование же трехмерного конечного безграничного пространства не может быть представлено наглядно. Но утверждают, что его нельзя и мыслить реально существующим, потому что оно предполагает (хотя бы и в неявном виде) существование реально не существующего пространства четырех измерений, в котором оно вмещено.

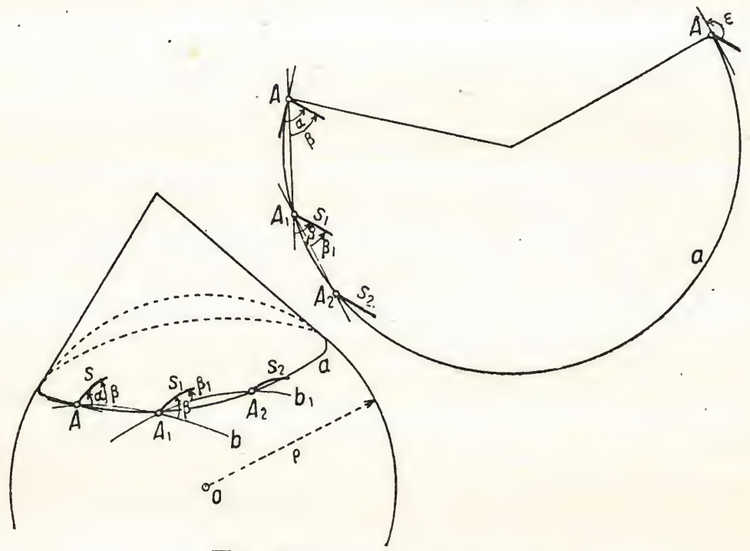
Однако и это возражение не имеет под собой почвы, как в этом можно убедиться, основываясь на следующем рассуждении, требующем, правда, некоторого внимания. Дело в том, что утверждение, будто конечное безграничное пространство можно мыслить только потому, что оно вмещено в пространстве большего количества измерений, неверно. Покажем, что поверхность шара—это конечное безграничное пространство

---

[1] Так, например, площадь F треугольника ABC будет $F=\rho^2\varepsilon$, где $\varepsilon=(\alpha+\beta+\gamma)-180°$—так называемый эксцесс, а ρ—произвольная постоянная. Если $\lim \rho=\infty$, то и $\varepsilon\to 0$.

двух измерений—действительно можно мыслить, не прибегая к пространству трех измерений, в которое эта поверхность вмещена, т. е. покажем, что некий мифический двумерный геометр мог бы, не прибегая к понятиям третьего измерения, установить конечность своего двумерного пространства.

Для этого, следуя Скаутену, на шаровой поверхности (например, на поверхности глобуса) выберем окружность a, не являющуюся большим кругом (например, любую параллель



Параллельное перенесение

к экватору). Через точку A, лежащую на этой окружности, проведем бесконечно-малую дугу s так, чтобы она заключала угол α с окружностью a. Теперь на окружности a выберем вторую точку A_1 так, чтобы дуга $\overset{\frown}{AA_1}$ была бесконечно-малой. Оставаясь на поверхности шара, можно попасть из точки A в точку A_1 наиболее коротким путем, не двигаясь при этом по дуге окружности a. Для этого нужно соединить точки A и A_1 дугой большого круга b, о котором мы знаем, что его плоскость проходит через центр шара. Этого, конечно, не знает наш двумерный геометр, но он все же сможет построить дугу b, выбрав из всех возможных кривых г е о д е з и ч е с к у ю л и н и ю, т. е. ту, которая дает самое короткое соединение точек A и A_1. С дугой b дуга s будет заключать угол β, отличающийся (понятно, лишь бесконечно мало) от угла α, который она заключает с дугой a. После этой подготовительной работы перенесем дугу s из точки A вдоль дуги b в новое положение s_1 так, чтобы ее начало совпало с точкой A_1 и чтобы угол между s_1 и b остался равным β. Такое параллельное бесконечно-малое перенесение вдоль геодезической линии было введено Леви-Чивита и носит его имя. После

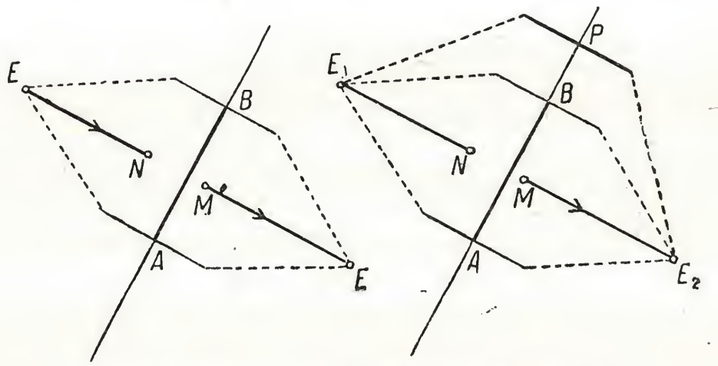
этого выберем на окружности a новую точку A_2, бесконечно близкую к A_1, соединим A_1 и A_2 геодезической линией b_1 (это опять будет большой круг), с которой дуга s_1 будет заключать угол β_1, и перенесем дугу s_1 в точку A_2 с сохранением угла β_1 между s_1 и b_1. Двигая таким образом s по окружности a от точки к точке, мы после счетного количества шагов вернемся к начальной точке A. И вот тогда окажется, что, вернувшись, дуга s не будет совпадать с начальным своим положением, а будет заключать с ним какой-то угол ε[1]. Его величина будет дана формулой, в которую, как это сумеет вычислить и наш вымышленный двумерный геометр, будет входить некоторая постоянная ρ, имеющая размерность длины. При этом она будет входить именно так, что если $\lim \rho = \infty$, то угол $\varepsilon = 0$. Таким образом, наш геометр сумеет решить, является ли его безграничный мир бесконечным или конечным, не нуждаясь при этом ни во вмещении своего двумерного мира в недоступный для его представлений трехмерный мир, ни в том, чтобы обойти его кругом.

И все же построенную Риманном геометрию нельзя считать прямым, не искаженным отображением реального пространства. Ведь пространство является объективной формой бытия материи, а значит, оно не только безгранично, но и бесконечно, как и сама материя. Его материальность определяет и его бесконечность. Это положение вовсе не снимает вопроса о необходимости его проверки, так же как и утверждение о несотворимости и неразрушимости движения материи не снимает задачи о проверке закона превращения и сохранения энергии. Но проверка конечного или бесконечного характера пространства не является делом геометрии, не может быть решена ее средствами, она является делом физики. Это совершенно четко высказал сам Риманн в названной работе: «Ответ на эти

---

[1] В этом можно убедиться, если к шару вдоль окружности a провести касательный конус и потом развернуть его на плоскость. На конусе мы получим изображение бесконечно-малой дуги s, а также и бесконечно-малой дуги геодезической линии b—последнюю в виде прямого отрезка, как кратчайшего расстояния точек A и A_1. Таким образом, понятно, что параллельное смещение дуги s при сохранении ее угла β с геодезической линией приведет дугу s в конечное положение, которое, оставаясь параллельным на развертке, будет заключать с окружностью a другой угол, чем вначале, а значит, отличаться и от своего начального положения на угол ε. Измерив длину окружности a и угол ε, наш геометр сможет вычислить ρ по формуле $\rho = \frac{a}{\sqrt{\delta\,(4\pi - \varepsilon)}}$. Обратная зависимость угла ε от ρ будет выражаться $\varepsilon = 2\pi\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4\pi^2\rho^2}}\right)$. Если F — площадь шарового сегмента, ограниченного окружностью a, то $\varepsilon = \frac{F}{\rho^2}$.

вопросы не может быть получен иначе, чем исходя из концепции явлений, до сих пор проверенных опытом, которые Ньютон взял за основу, привнося при этом в эту концепцию последовательные изменения, требуемые фактами, которые она не в состоянии объяснить. Но это вводит нас в область другой науки, в область физики». Еще Гаусс пытался решить этот вопрос опытным путем, на основе землемерных вычислений больших треугольников, однако безуспешно из-за малой точности измерений.



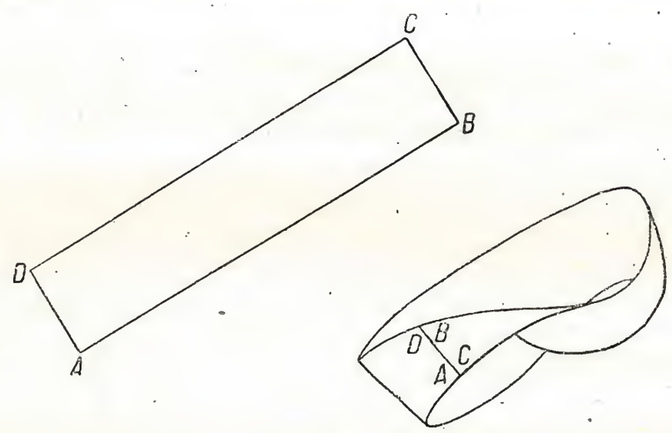
Две разновидности геометрии Риманна

По той же причине позднейшие астрономические выкладки не дали также результатов. Созданная в 1905—1915 гг. теория относительности Эйнштейна включает в качестве важнейшей составной части попытку проверить, какое именно геометрическое пространство является наиболее близким отображением пространства действительного материального мира, стремясь положить его в основу физики. Однако, хотя теория относительности имеет большие успехи, в этой области она не смогла добиться недвусмысленного ответа на поставленный вопрос. Зато идеалистами делаются из нее необоснованные выводы в пользу конечности, замкнутости мира, обладающего геометрией, подобной той, которую построил Риманн.

Впрочем, геометрия, созданная Риманном, существует не в одной, а в двух разновидностях. В первой из них предполагают, что построенные в концах отрезка $\overline{AB}$ перпендикуляры пересекаются в о д н о й точке E, во второй—что они пересекаются в д в у х различных точках E_1 и E_2. Первая разновидность представляет собой геометрию, в которой прямая $\overline{AB}$ не делит плоскость на две раздельные части. На самом деле, если мы выберем две точки M и N, лежащие, как кажется с первого взгляда, по разные стороны от прямой $\overline{AB}$, то, чтобы перейти из точки M в точку N, не пересекая прямой $\overline{AB}$, достаточно будет двигаться через точку E. Конечно, так же как и в геометрии

Лобачевского и по той же причине, этого нельзя изобразить на чертеже.

В этой разновидности геометрии плоскость является о д н о с т о р о н н е й поверхностью. Модель такой поверхности, так называемую л е н т у М е б и у с а, можно построить, если длинный и узкий, вырезанный из бумаги, прямоугольник $ABCD$ склеить так, чтобы вершина A совпала с вершиной C, а вершина D с вершиной B. В отличие, например, от шаровой поверхности,



Лента Мебиуса

имеющей две стороны—внешнюю и внутреннюю,—лента Мебиуса имеет только одну сторону. Если двигать по такой поверхности небольшую окружность, обладающую вращением определенного смысла (например, по направлению часовой стрелки), то, обойдя вокруг поверхности, она вернется в начальное положение, обладая противоположным смыслом вращения (против часовой стрелки).

Во второй разновидности геометрии Риманна прямая $\overline{AB}$ делит плоскость на две раздельные части, так же как и в геометрии Эвклида. Действительно, если мы захотим перейти из точки M в точку N, двигаясь по направлению к E_1, а затем оттуда через E_2, то мы должны будем где-то пересечь прямую $\overline{AB}$. Зато, в этой разновидности геометрии две точки E_1 и E_2 не определяют уже только одну прямую, а бесчисленное множество прямых, и две прямые пересекаются не в одной, а всегда в двух точках.

Напомним, что количество параллельных из точки к прямой равно у Лобачевского двум, у Эвклида одному, у Риманна (в обеих разновидностях) нулю. Это напоминает нам количество возможных вещественных корней обыкновенного квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. В зависимости от значений коэфициентов a, b, c оно, как известно, может быть равно двум ($x_1 \neq x_2$, оба

вещественные и разные), одному ($x_1 = x_2$, оба вещественные и равные), нулю (x_1, x_2, комплексные, разные или равные). Но это вовсе не случайная аналогия, а выражение глубоких связей. Если в геометрии Лобачевского существуют две параллельные к прямой a из точки O, то, следуя способу проективной геометрии, их можно рассматривать как построение асимптот к гиперболе. Аналогично, единственная параллельная эвклидовой геометрии отвечает одной касательной в бесконечности к параболе, а отсутствие параллельных в обеих разновидностях геометрии у Риманна соответствует отсутствию асимптот у эллипса. Именно поэтому Клейн назвал эти геометрии г и п е р б о л и ч е с к о й, п а р а б о л и ч е с к о й и э л л и п т и ч е с к о й геометриями.

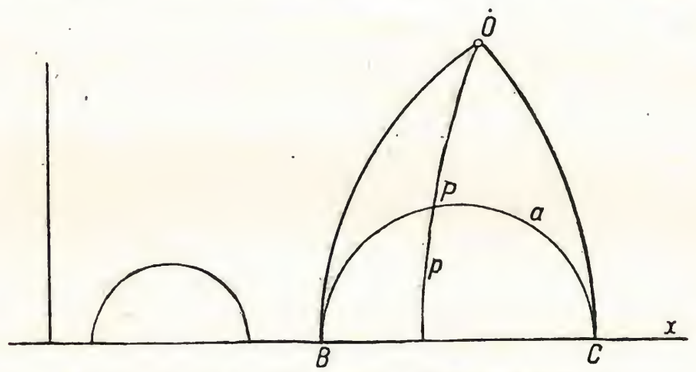
В эллиптической геометрии периметр и площадь круга радиуса r меньше, а в гиперболической геометрии периметр и площадь круга радиуса r больше, чем периметр и площадь круга радиуса r в эвклидовой геометрии. Поэтому можно сказать, что, в известном смысле, в эллиптической геометрии вокруг точки меньше, а в гиперболической геометрии больше простора, чем в геометрии Эвклида.

Понятно, что наличие трех сосуществующих, но столь различных геометрических систем вызвало прежде всего нападки эмпириков на геометров и привело к пока что неудачным попыткам установить опытным путем, какая из этих трех систем является истинной. Но больше всего пользы постарались извлечь из наличия этой тройственности идеалисты. Они заявили, что «неразрывная связь между геометрией и пространством нашего опыта потеряла свою необходимость». Геометрия якобы не заботится об опыте, а развивает логически стройную систему истин из свободно выбранных предпосылок; их выбор ограничен лишь общелогическими требованиями.

Однако именно эта постановка вопроса нуждалась в дальнейшем выяснении того, какова природа логических требований, предъявляемых к предпосылкам геометрии. Система аксиом геометрии должна быть с о в м е с т и м о й, д о с т а т о ч н о й и н е з а в и с и м о й. Первое и наиболее важное из этих требований означает, что, какие бы следствия мы ни выводили из этой системы, мы не должны никогда натолкнуться на противоречия. Но из системы аксиом любой геометрии мы можем выводить все новые и новые следствия. Поэтому, собственно, нельзя сказать с абсолютной уверенностью, что противоречия не встретятся нам в дальнейшем.

Чтобы убедиться в совместимости аксиом геометрии, прибегают к методу и н т е р п р е т а ц и и (истолкования). Пример применения этого метода мы уже приводили, когда говорили о принципе взаимности проективной геометрии, указав, что ее

положения остаются верными при целесообразной замене одних слов другими словами. Но подобного рода «словари» могут быть построены очень разнообразно. Так, например, представим себе на плоскости систему всевозможных окружностей самых разнообразных радиусов с различными смыслами вращения (в направлении или против направления часовой стрелки). Каждую такую окружность мы будем принимать за «точку». Под «прямой» мы будем подразумевать одну из следующих трех систем окружностей: 1) концентрические, имеющие как один, так и



Интерпретация геометрии Лобачевского

другой смысл вращения; 2) одинакового радиуса и смысла вращения с центрами на одной (обыкновенной) прямой; 3) с центрами, расположенными на одной прямой, и имеющие две общие касательные с вращением в противоположные стороны от точки пересечения этих касательных. Оперируя этими «точками», «прямыми», а по аналогии и «плоскостями», можно построить геометрию Эвклида для всего трехмерного пространства, которое таким путем окажется отображенным на плоскости.

Укажем еще пример истолкования геометрии Лобачевского, ограничившись для простоты только планиметрией. Для изображения плоскости Лобачевского изберем полуплоскость Эвклида, т. е. часть обыкновенной плоскости, находящейся, например, над осью x. Точкам геометрии Лобачевского будут соответствовать точки нашей полуплоскости. Прямым геометрии Лобачевского будут соответствовать полуокружности, имеющие центр на оси x, а также полупрямые, перпендикулярные к оси. Это и будут наши «прямые» в кавычках. Теперь покажем, что свойства прямых геометрии Лобачевского, если их перенести на наши «прямые», будут полностью соответствовать свойствам фигур геометрии Эвклида. Пусть дана точка O, не лежащая на «прямой» a. Проведем через точку O «прямую» p, пересекающую «прямую» a в точке P. Если теперь мы будем передвигать точку P по «прямой» a, то дойдем, наконец, до точки B, через которую про-

ходит «прямая» b параллельная к a. Аналогично получим и вторую параллельную «прямую» c, проходящую через точку C.

Такое разнообразное истолкование геометрических образов объясняется тем, что даже геометрическая точка—самый простой геометрический образ—на деле связана бесчисленным множеством отношений со всей совокупностью пространственных форм. Она может рассматриваться с самых различных сторон: как пересечение пучка прямых, как пересечение пучка плоскостей, как элемент точечного ряда, как центр концентрических шаров и т. д. и т. п. На деле же она заменяет и пучок прямых, и пучок плоскостей, и точечный ряд, и концентрические шары и т. д. В аксиомах геометрии точка (аналогично и прямая и т. д.) настолько опустошена, лишена чувственного содержания, что именно поэтому высказывания о ней применимы ко всем объектам, от которых она была абстрагирована. Именно поэтому возможно составление «словарей» — истолкований не только внутри одной и той же геометрической системы (при замене одного рода элементов другим, например, точек окружностями), но и переводящих целые геометрические системы в другие.

Таким образом, вопрос о совместимости аксиом ряда неэвклидовых геометрий можно свести путем подбора соответствующего истолкования к вопросу о непротиворечивости геометрии Эвклида. Но откуда мы черпаем уверенность, что хотя бы геометрия Эвклида является непротиворечивой? Быть может, из того факта, что с ее помощью построены прочнейшие сооружения зданий, мостов, тоннелей, созданы конструкции бесперебойно работающих чудесных машин и приборов? Но для геометров-идеалистов критерий практики не имеет, понятно, доказательной ценности. Поэтому они прибегают и здесь к методу интерпретации, ценность которого для нас состоит в том, что он дает возможность изучить границы применимости формальной логики к геометрии. Точки трехмерной геометрии Эвклида рассматривают здесь как тройки чисел (координат x, y, z), прямые и плоскости—как линейные уравнения и получают, таким образом, «аналитическое пространство». Вопрос о непротиворечивости эвклидовой геометрии сводят, таким образом, к вопросу о непротиворечивости алгебры и, значит, в конечном счете, арифметики, т. е. к вопросу об основах математики в целом. В этом направлении шло развитие всей современной геометрии. Невзирая на идеалистические мотивы, руководившие отдельными исследователями, геометры внесли ценнейший вклад в дело изучения структуры геометрических аксиом, их совместимости, необходимости, достаточности и независимости. Особенно велики в этом отношении заслуги Гильберта, который в своих «Основах геометрии» (1899 г.) положил начало новому этапу—аксиоматическому методу в геометрии.

У Эвклида аксиомы содержат высказывания, непосредственно опирающиеся на чувственную интуицию, на наглядность. Но после того как была доказана возможность существования внутренне непротиворечивых неэвклидовых геометрий, доверие к наглядности было поколеблено. Поэтому нельзя было оставаться на прежней точке зрения.

Известно, что многие физики после открытий (в конце XIX в.) электрона, переменной массы, радиоактивности, лучей Рентгена и т. п. стали считать, что «материя исчезла и остались одни уравнения», что весь мир состоит лишь из наших восприятий и наука сводится к их изучению. Подобно этому и многие геометры, примерно к тому же самому времени, после открытия неэвклидовых геометрий, прониклись убеждением, что основные понятия и аксиомы геометрии (раз они не даны нам непосредственно наглядно) вовсе не зависят от материального пространства, а являются произвольными или условными положениями и символами, нами свободно конструируемыми. Лишь единичные математики, как Клейн, выступили с резкой критикой этого сильно распространенного взгляда формалистов, заявив, что, хотя основные понятия и аксиомы геометрии не даны нам непосредственно наглядно, тем не менее они являются целесообразными абстракциями, идеализацией существующих пространственных отношений действительного мира. Так, например, говорит Клейн, «уже точное понятие точки не существует непосредственно чувственно наглядно; оно является лишь воображаемым пределом, к которому мы можем приближаться в своем представлении о малой части пространства, но мы не в состоянии когда-либо достигнуть ее». Он зло издевался над Гильбертом и его школой, называя их «средневековыми номиналистами», и считал, что люди, интересующиеся не самым предметом геометрии и его свойствами, а оперирующие лишь именами и логическими схемами, люди, говорящие: «мы назовем совокупность трех координат точкой, не представляя себе при этом чего-либо», «мы договоримся принять «произвольные» положения о таких точках», —эти люди защищают «точку зрения, равносильную смерти всякой науки».

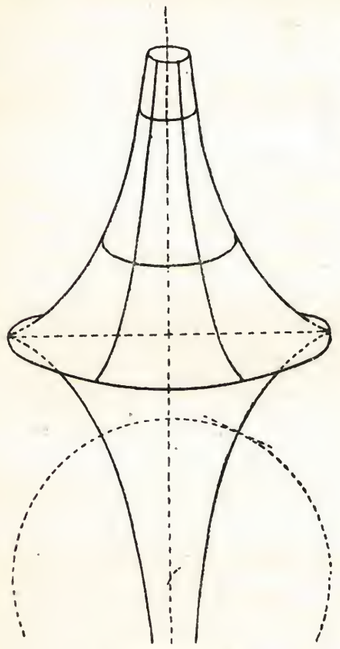
Вопреки своим неверным, идеалистическим позициям, Гильберт довел в то же самое время аксиоматику до большого совершенства. Точки, прямые и плоскости он, как уже сказано, ввел как простые названия, отказавшись от какого-либо чувственного представления о них. Аксиомы геометрии он разбил на пять групп: 1) аксиомы сочетания, связанные со словом определять (лежать на, проходить через); 2) аксиомы расположения, связанные со словом между (предшествовать, следовать); 3) аксиомы равенства, связанные со словом

равно (равенство отрезков, углов); 4) аксиома параллельности (V постулат Эвклида); 5) аксиомы непрерывности—известная нам аксиома Архимеда и аксиома полноты, утверждающая, что «точки, прямые и плоскости геометрии образуют систему вещей, которая не может быть расширена путем присовокупления новых вещей при сохранении всех указанных аксиом».

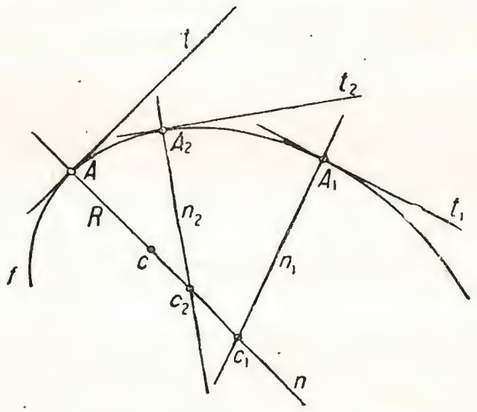
Для того чтобы доказать непротиворечивость этой системы аксиом, Гильберт образует область Ω вещественных чисел, получающихся из 1, если конечное количество раз применить к 1 сложение, вычитание, умножение, деление и операцию $|\sqrt{1+\omega^2}|$, т. е. абсолютное значение от $\sqrt{1+\omega^2}$, где ω представляет любое число, полученное этим же путем. Пару (x, y) двух чисел x и y этой области Ω Гильберт рассматривает как «точку» и отношения $(u : v : w)$ трех чисел этой области (если только не имеет места $u = v = 0$) как «прямую», которая будет проходить через «точку» (x, y), если $ux + vy + w = 0$. Он показывает, что в области Ω будут выполнены все аксиомы за исключением аксиомы полноты, и понятно, что всякое противоречие между геометрическими аксиомами привело бы к противоречиям в арифметике области Ω. Если же вместо области Ω взять область всех вещественных чисел, то будет выполнена и аксиома полноты и доказана непротиворечивость всей геометрии. Аналогично доказывается и независимость одних групп аксиом от других. Для этого Гильберт и его последователи строят разного рода псевдогеометрии, выводя их непротиворечивость снова посредством установления взаимно-однозначного соответствия с каким-либо «аналитическим пространством». Этим путем удалось выяснить громадное значение аксиом непрерывности для геометрии, т. е. как раз тех аксиом, на которые в древности обращали наименьшее внимание.

Из сказанного можно сделать себе известное представление о том, как выглядит современная абстрактная геометрия. Но было бы большим заблуждением полагать, что раз основные понятия и аксиомы современной геометрии далеко ушли от непосредственной наглядности, раз они не являются прямым отображением материального пространства, то эта геометрия имеет лишь абстрактно-логическое значение. Мы уже говорили, что всякой геометрии можно дать соответствующую интерпретацию в геометрии Эвклида. Так, например, вторую разновидность геометрии, построенной Риманном, можно истолковать (если ограничиться лишь «плоскостью») как эвклидову геометрию на поверхности шара, где роль «прямых» будут играть большие круги. Параллельных «прямых» здесь не будет; любые две «прямые» будут пересекаться, причем в двух точках (диаметрально противоположных). Поэтому такую

разновидность геометрии принято называть сферической. Геометрия Лобачевского (для «плоскости») может быть также истолкована как геометрия на кривой поверхности вращения, так называемой псевдосфере Бельтрами[1]. «Прямые» геометрии Лобачевского будут изображаться на ней геодезическими линиями. Однако так как псевдосфера имеет особую линию—круговое ребро, делящее ее на две половины, то на любой такой половине будет изображаться лишь полуплоскость Лобачевского. Как



Псевдосфера



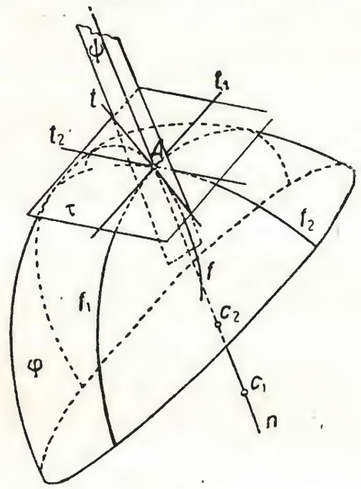
Кривизна плоской кривой

доказал Гильберт, не существует поверхности, на которой можно было бы изобразить всю плоскость Лобачевского, подобно тому как на шаровой поверхности изображают сферическую геометрию Риманна.

Чтобы понять более глубоко связь между неэвклидовыми геометриями и геометриями кривых поверхностей, нам придется познакомиться с понятием кривизны. На кривой f, расположенной в плоскости, изберем точку A, построив в ней касательную t и перпендикуляр n к этой касательной; этот перпендикуляр принято называть нормалью. Построим теперь нормаль n_1 в точке A_1, лежащей на кривой f, неподалеку от точки A. Нормаль n_1 пересечет нормаль n в точке C_1. Если мы теперь будем приближать точку A_1 к точке A так, чтобы

[1] Уравнение кривой, которая, вращаясь вокруг оси y, образует эту поверхность, пишется: $y = a\left(\ln \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2}\right)$. Эта кривая, так называемая трактриса, пересекает под прямым углом все окружности радиуса a, имеющие центр на оси y.

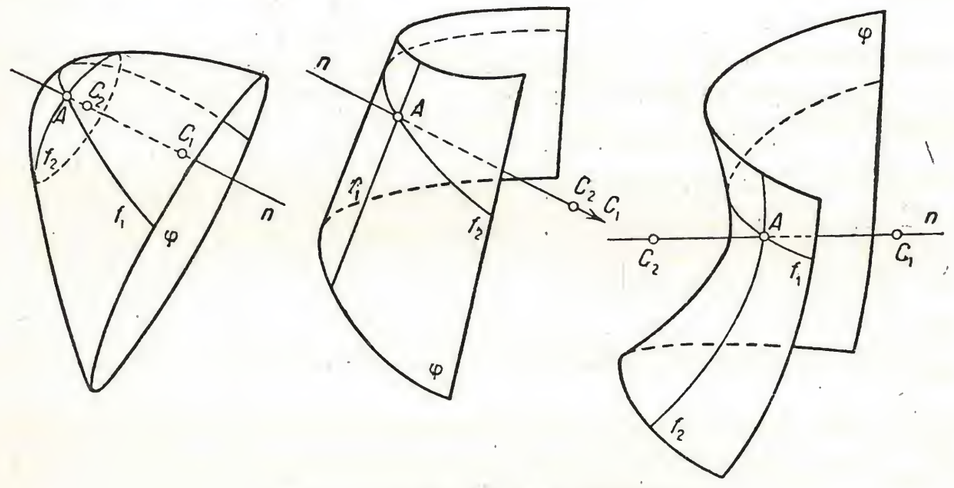
она постепенно занимала положения A_2, A_3..., и строить в этих точках нормали n_2, n_3,..., то они будут пересекать нормаль n в точках C_2, C_3, ... Если в последовательности точек $C_1, C_2, C_3, \ldots$ существует какая-то предельная точка C, то ее называют ц е н т р о м к р и в и з н ы к р и в о й f в точке A. Расстояние AC называют р а д и у с о м к р и в и з н ы R кривой f в точке A, а его обратное значение $K = \frac{1}{R}$—м е р о й к р и в и з н ы. Ясно, что центр кривизны может быть, как правило, построен для любой точки кривой и что в общем случае радиус кривизны и мера кривизны кривой будут меняться от точки к точке. Ясно также, что окружность будет иметь постоянную кривизну, кривизна прямой будет равна 0, а кривизна изолированной точки ∞.



Кривизна поверхности

Перенесем теперь эти понятия с плоских кривых, т. е. с одномерных геометрических образов, на кривые поверхности—образы двумерные. Изберем на поверхности φ точку A и построим в ней к а с а т е л ь н у ю п л о с к о с т ь τ. В точке A проведем перпендикуляр к касательной плоскости—н о р м а л ь n. Через нормаль n можно проложить целую связку плоскостей φ, и каждая из них будет пересекать данную поверхность φ в какой-нибудь плоской кривой f. Все эти кривые f называются н о р м а л ь н ы м и с е ч е н и я м и поверхности φ в точке A. Имея общую точку A, кривые f образуют пучок кривых с общей всем нормалью n. Найдем теперь центры кривизны C каждой из этих кривых. Это будет ряд точек на нормали n, и окажется, что одна из них C_1 будет наиболее отдалена от точки A, другая C_2 наиболее близка к ней. Соответственные нормальные сечения f_1 и f_2 будут иметь наибольший и наименьший радиусы кривизны R_1 и R_2, а значит, и наименьшую и наибольшую кривизны $K_1 = \frac{1}{R_1}$, $K_2 = \frac{1}{R_2}$. Их называют г л а в н ы м и р а д и у с а м и к р и в и з н ы и г л а в н ы м и к р и в и з н а м и, а их произведение $K = K_1 \cdot K_2 = \frac{1}{R_1 R_2}$ — г а у с с о в о й м е р о й к р и в и з н ы поверхности φ в точке A. Однако при этом возможны три случая: 1) точки C_1 и C_2 находятся по одну и ту же сторону точки A, а значит, R_1 и R_2 имеют одинаковые знаки. Следовательно, K—величина положительная. Тогда мы говорим, что

поверхность φ обладает п о л о ж и т е л ь н о й, или э л л и п т и ч е с к о й, кривизной в точке A; 2) одна из точек C_1, C_2 бесконечно удалена. Следовательно, K равна 0. Тогда поверхность обладает в точке A п а р а б о л и ч е с к о й кривизной; 3) точки C_1 и C_2 расположены по разные стороны точки A, значит, R_1 и R_2 имеют разные знаки. Следовательно, K—величина отрицательная. Тогда поверхность имеет в точке A о т р и ц а т е л ь н у ю, или г и п е р б о л и ч е с к у ю, кривизну. Как



Поверхности разной кривизны

правило, кривизна поверхности меняется от точки к точке, но существуют поверхности, имеющие во всех точках одинаковую кривизну,—поверхности постоянной кривизны: шар (эллиптическая), прямой круговой цилиндр или плоскость (параболическая), псевдосфера (гиперболическая кривизна).

Если теперь имеются две поверхности φ_1 и φ_2, обладающие одной и той же постоянной кривизной K, то их объединяет одно замечательное свойство: они могут быть переведены одна в другую путем и з г и б а н и я, не связанного с растяжением, т. е. оставляющего неизменными расстояния, измеряемые по геодезическим линиям между точками поверхности. Поэтому при изгибании геометрические фигуры остаются равными самим себе—на обеих поверхностях господствует одна и та же геометрия. Этим и объясняется, почему на плоскости, на параболическом цилиндре и на небольших частях кругового цилиндра или конуса будет иметь место одна и та же э в к л и д о в а параболическая геометрия. Но она не может иметь места на поверхности шара, где господствует э л л и п т и ч е с к а я геометрия, или на поверхности псевдосферы с ее г и п е р б о л и ч е с к о й геометрией Лобачевского, так как эти поверх-

ности имеют другую кривизну, чем плоскость, и никаким изгибанием не могут быть из нее получены. Господство различных геометрических систем на поверхностях постоянной кривизны, не переходящих друг в друга путем изгибания, дает нам возможность истолковыватьгеометрии неэвклидовой «плоскости», как геометрии этих поверхностей.

Но раз кривизна поверхности так тесно связана с ее изгибаемостью, т. е. со свойством, целиком относящимся к одним лишь геометрическим образам на самой поверхности, которое можно поэтому выразить, не прибегая к помощи понятий, выходящих за пределы этой поверхности в третье измерение, то и понятие кривизны не нуждается в них. Эту замечательную теорему открыл еще Гаусс, показав, что кривизна $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ является инвариантом элемента дуги ds на поверхности.

Если мы попытаемся перенести эти положения, верные для поверхностей, вмещенных в эвклидово пространство, на поверхности, вмещенные в неэвклидово пространство, то придется иметь в виду, что разные определения кривизны поверхности, совпадающие для пространства Эвклида, могут не совпадать для неэвклидова пространства. Так, кривизна поверхности φ (вмещающейся в неэвклидово пространство), определяемая как инвариант элемента дуги ds, называется абсолютной кривизной K_a. Она не совпадает с относительной кривизной K_r, определяемой как произведение $\frac{1}{R_1 R_2}$ (где R_1 и R_2 наибольший и наименьший радиусы кривизны нормальных сечений). Между ними существует простое соотношение $K_a = K_r + k$, где k означает кривизну данного пространства.

Наконец, выяснится, что, так же как в эвклидово пространство вмещаются поверхности, на которых господствует неэвклидова геометрия, так и в неэвклидово пространство вмещаются поверхности, на которых господствует геометрия Эвклида. Так, например, в эллиптическом пространстве, в котором, естественноплоскость имеет эллиптическую геометрию, существует поверх, ность Клиффорда, на которой действует эвклидова геометрия. Это обстоятельство показывает, что из предположения об эвклидовой или неэвклидовой структуре пространства еще не следует, что оно бесконечно или конечно. Таким образом, мы еще раз убеждаемся, что проблема конечности или бесконечности мира не является геометрической проблемой. Это—проблема протяженности материи, а не только внешних, безразличных к ней форм ее бытия, каковыми, по представлению многих математиков, именно и являются пространственные формы, составляющие внешние условия существования материи.

Как уже сказано, благодаря развитию проективной геометрии, а затем неэвклидовых геометрий в современной геометрии широко развился абстрактный аксиоматический метод. Он привел большинство геометров к идеалистической крайности, к отказу от связи геометрии с чувственным восприятием пространственных форм и отношений материального мира. Другие источники ее сугубо абстрактного характера лежат, собственно, вне геометрии—в алгебре и в анализе.

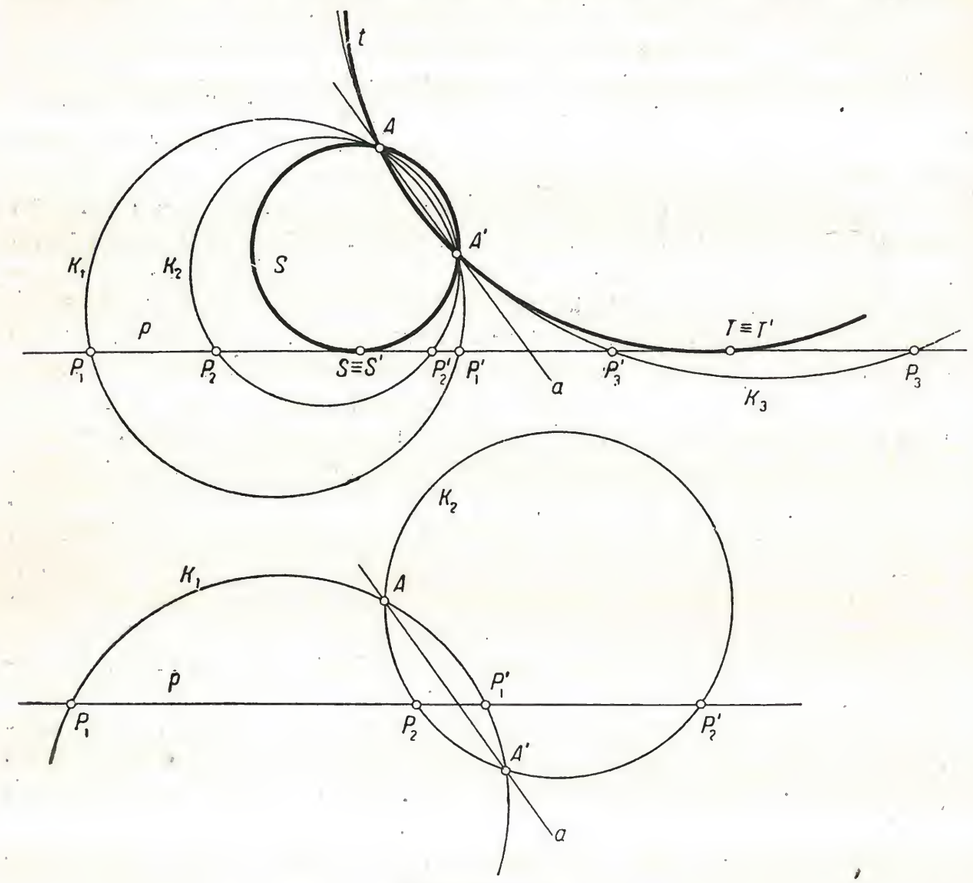
Алгебраическое рассмотрение геометрических образов внесло в геометрию сначала мнимости, а позднее идеи теории групп.

Так же как и несобственные, бесконечно удаленные элементы проективной геометрии, мнимости были введены в геометрию для того, чтобы придать возможно большую общность ее теоремам и сделать ненужным повторное рассмотрение исключений. Таким образом, мнимые элементы играют в геометрии ту же самую роль, как комплексные числа в алгебре. Ведь введение комплексных чисел служило первоначально лишь для того, чтобы избавиться от необходимости различать случаи, когда алгебраическое уравнение n-й степени имеет 0,1, 2,..., n корней. При введении мнимых точек также не приходится различать случаи, когда кривая n-го порядка пересекается прямой в 0, 1, 2,..., n точках. Так же как всякое уравнение n-й степени имеет n корней (вещественных или комплексных, разных или тождественных), и всякая кривая n-го порядка пересекается любой прямой ровно в n точках (действительных или мнимых, собственных или бесконечно удаленных, разных или совпадающих). Первым мнимости ввел в геометрию Понселе в 1822 г., руководствуясь при этом однако не алгебраическим методом, а своеобразным «принципом непрерывности». В дальнейшем идеи Понселе были развиты Шалем и Дарбу.

Следуя этим идеям, окружность и прямая всегда пересекаются в двух точках. Все окружности, лежащие в одной плоскости, пересекают несобственную прямую этой плоскости в одних и тех же двух мнимых точках, которые называются круговыми точками. Аналогично и все шаровые поверхности пространства пересекают его бесконечно удаленную плоскость в одной и той же мнимой окружности, называемой шаровой окружностью.

Мнимые элементы получают наглядность благодаря введению понятия инволюции. Ограничившись плоскостью, возьмем в ней связку окружностей (т. е. всевозможные окружности, проходящие через две заданные точки A и A') и пересечем эту связку прямой p. Какая-нибудь окружность k_1 нашей связки пересечет прямую p в двух точках P_1 и P_1', причем условимся выбирать порядок наименования точек P_1 и P_1' таким образом,

чтобы P_1 лежало по соседству с A, а P_1' с A'. Так же получим и другую пару точек P_2, P_2', лежащих на окружности k_2. Пары точек P_1 P_1'; P_2, P_2'; ... образуют инволюцию. При этом возможны два случая. Если прямая p не пересекает внутри отрезок $\overline{AA'}$, тогда в связке окружностей можно найти две окруж-



Инволюция

ности s и t, отличающиеся тем, что они касаются прямой p в точках S и T. Точка S, будучи тождественной с точкой S', является двойной точкой; такой же двойной точкой будет и точка $T \equiv T'$. В этом случае такую инволюцию мы называем гиперболической. Если же прямая p пересекает внутри отрезок $\overline{AA'}$, тогда двойные точки будут мнимыми: это случай эллиптической энволюции. Но тем самым дан способ наглядного представления пары мнимых точек—они могут быть представлены эллиптической инволюцией. Если мы еще условимся о порядке следования точек P_1 и P_1', то эта инволюция изобразит и отдельную мнимую точку. Исходя из точек, нетрудно изобразить и другие мнимые элементы.

Наглядное истолкование мнимых элементов было дано в 1856 г. Штаудтом; затем этот метод был обобщен Софусом Ли, и в особенности Клейном и его учениками.

О значении теории групп для геометрии мы уже говорили в своем месте. Мы показали, как понятие группы преобразований и связанное с ним понятие инвариантов позволяют классифицировать геометрию на метрическую, аффинную, проективную и топологию.

В 1872 г. Клейном, в известной Эрлангенской программе, была поставлена задача систематизации геометрии с единой точки зрения. Основной идеей этой программы было следующее положение. Если дана какая-либо группа $\mathfrak{H}$ пространственных преобразований, содержащая главную метрическую группу $\mathfrak{G}_7$, то теория инвариантов группы $\mathfrak{H}$ определяет известный вид геометрии, и таким путем можно получить любую мыслимую геометрию. Эта точка зрения благодаря работам самого Клейна, Софуса Ли и многочисленных последователей завоевала себе всеобщее признание. Изучение какого-либо многообразия свелось тем самым к построению теории таких отношений, которые оставались бы инвариантными относительно группы преобразований, действующих в этом многообразии. Таким образом, был сделан важнейший шаг в деле подготовки математического аппарата теории относительности современной физики.

Глубокий смысл этого нового подхода состоит в том, что в многообразиях четко разграничивают понятия положения и протяженности, причем в основу кладется именно протяженность, а не как прежде (начиная с Декарта) положение. Отсюда следует, что изучение многообразий точек должно опираться теперь не на координаты точек, а на взаимные расстояния между точками. Это, правда, сложнее, но зато делает нас независимыми от системы координат, чуждой данному многообразию. Вместо прежней относительной геометрии мы получаем абсолютную геометрию. Название «абсолютная» геометрия, введенное Риччи, крайне неудачно не только потому, что создает впечатление, будто эта геометрия абсолютна в смысле метафизической философии. Оно не соответствует и геометрическому ее содержанию, ибо, перестав быть зависимой от системы координат, эта геометрия тем не менее относительна, завися от того вида пространства, в котором она строится.

Абсолютная геометрия, основную идею которой, исходя из задач естествознания, наметили еще Гаусс и Риманн, рассматривает непосредственно значения расстояний, или, точнее, интервалов, между точками многообразия. Мы намеренно упо-

требили здесь термин «многообразие», а не «пространство». Надо иметь в виду, что современная геометрия распространяет свои понятия с материального трехмерного пространства на «пространства» с четырьмя и больше измерениями.

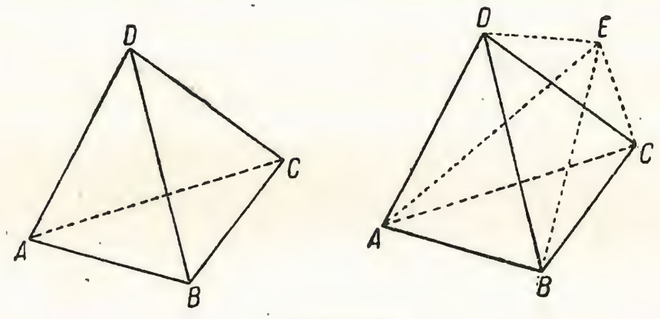
Идеи многомерной геометрии имелись еще у Декарта, однако они получили свое развитие лишь в работах Гамильтона (1843 г.) и в особенности Грассманна (1844 г.). Но только в конце XIX в. эти идеи были во всей широте оценены и разработаны. Оказалось, особенно благодаря работе Гельмгольца (1868 г.) «О фактах, лежащих в основе геометрии», что они имеют существенное значение для теоретического естествознания. В настоящее время физика оперирует не только с пространством конечного числа измерений $\mathfrak{R}_4$, но и с $\mathfrak{R}_\infty$—пространством бесконечного числа измерений. Простейшим примером является совокупность всех возможных степенных рядов $\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ Каждый такой ряд можно рассматривать как «точку» с координатами $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Разумеется, что не только пространство $\mathfrak{R}_\infty$, но и пространство $\mathfrak{R}_n$ и даже $\mathfrak{R}_4$ нельзя представить себе наглядно, ибо все это лишь аналогии трехмерного пространства. Но введение этих несуществующих вдействительности «пространств» приносит все же громадную реальную пользу, так как дает возможность оперировать не просто с формальными аналитическими выражениями, а с некоторой аналогией геометрических образов, благодаря чему наша пространственная интуиция приходит на помощь логическому рассудку.

Несмотря на то что четырехмерное пространство $\mathfrak{R}_4$п нельзя представить наглядно, его можно все же представить мысленно. Для этого достаточно допустить, что существует одна единственная точка O, не принадлежащая к трехмерному пространству $\mathfrak{R}_3$, и видоизменить некоторые из аксиом. Соединив точку O с любой точкой A пространства $\mathfrak{R}_3$, получим прямую a, все точки которой (кроме точки A) будут лежать вне $\mathfrak{R}_3$. Две плоскости α и β, лежащие в $\mathfrak{R}_4$, но не принадлежащие к одному и тому же $\mathfrak{R}_3$, будут пересекаться только в одной точке C.

Так же как на плоскости, т. е. в пространстве $\mathfrak{R}_2$, мы изображаем геометрические формы $\mathfrak{R}_3$, можно изобразить геометрические формы $\mathfrak{R}_4$ и в пространстве $\mathfrak{R}_3$. Так, например, чтобы изобразить тетраэдр, мы чертим сначала треугольник ABC, затем изображаем в его плоскости точку D, которую однако мыслим расположенной вне плоскости. Эту точку D мы соединяем затем с вершинами A, B, C и получаем образ тетраэдра, имеющего 4 вершины, 6 ребер и 4 грани. Аналогично, чтобы изобразить четырехмерный сверхтетраэдр, мы строим сначала тетраэдр $ABCD$ (его модель, например, из проволоки), затем изображаем в трехмерном пространстве точку E, которую мыслим расположенной вне пространства $\mathfrak{R}_3$. Точку E мы соединяем с вершинами

A, B, C, D и получаем модель сверхтетраэдра, имеющего 5 вершин, 10 ребер, 10 граней и 5 сверхграней (каждая из них будет трехмерным тетраэдром).

Вполне понятно, что в фиктивном четырехмерном пространстве многое будет настолько отлично от пространства трех измерений, насколько последнее отлично от двумерного пространства. Так, если на плоскости нельзя изнутри замкнутой кривой перейти во-вне, не пересекая ее, то это возможно сделать в трехмерном пространстве. Аналогично, если изну-



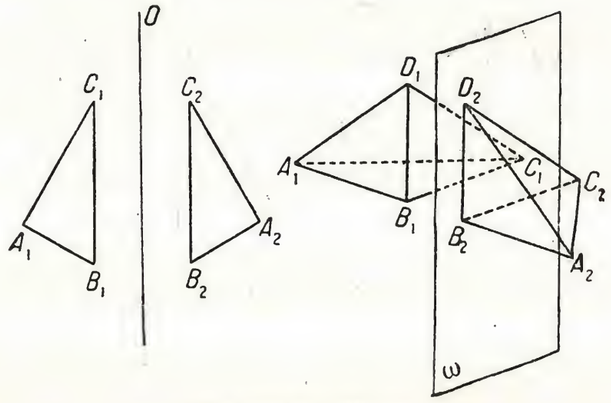
Тетраэдр

три замкнутой поверхности нельзя перейти во-вне, не пересекая этой поверхности, то это окажется «возможным» в пространстве четырех измерений. Так же как левый треугольник $A_1B_1C_1$ можно отождествить с правым треугольником $A_2B_2C_2$, лишь выйдя из плоскости, поворачивая его в пространстве вокруг оси симметрии o, так и левый тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ можно отождествить с правым тетраэдром $A_2B_2C_2D_2$, лишь выйдя за пределы трехмерного пространства, вывернув его в четырехмерное пространство вокруг плоскости симметрии ω.

Впрочем, аналогию между пространствами разных измерений нельзя проводить слепо. Так, мы уже знаем, что кроме ориентируемых поверхностей (например, шаровой поверхности) существуют неориентируемые поверхности (например, лента Мебиуса). Между тем неориентируемых трехмерных пространств не существует; лишь пространства $\mathfrak{R}_{2n}$, имеющие четное количество измерений, делятся на ориентируемые и неориентируемые.

Введение четырехмерной и вообще многомерной геометрии зачастую служит в качестве аргумента в пользу спиритизма. Еще в 1873 г. лейпцигский астроном Цельнер, усиленно работавший «уже много лет в области «четвертого измерения пространства»... открыл, что многие вещи, невозможные в пространстве трех измерений, происходят сами собой в пространстве четырех измерений. Так, например, в этом последнем пространстве можно вывернуть, как перчатку, замкнутый металлический шар, не проделав в нем дыры, точно так же можно

завязать узел на не имеющей с обеих сторон концов или закрепленной на обоих концах нитке; можно также переплести два раздельных, замкнутых кольца, не раскрывая ни одного из них, и тому подобные фокусы». Об этом сообщает Энгельс, издеваясь над тем, как «духи доказывают существование четвертого измерения, как и четвертое измерение свидетельствует о существовании духов», как «господин профессор Цельнер обратился к одному или нескольким медиумам, чтобы с их помощью установить местопребывание четвертого измерения. Успех при этом был поразительный»[1]. Энгельс вскрывает причи-



Ориентируемость

ну того, почему и когда от естествознания и математики пролагается столь легко путь к мистицизму: «..эмпирическое презрение к диалектике наказывается тем, что некоторые из самых трезвых эмпириков становятся жертвой самого дикого из всех суеверий— современного спиритизма... Обыкновенные математики метафизического пошиба не перестают горделиво указывать на абсолютную непогрешимость результатов их науки... Достаточно, однако, привыкнуть приписывать $\sqrt{-1}$ или же четвертому измерению реальность вне нашей головы, чтобы решиться сделать еще шаг дальше и признать спиритический мир медиумов»[2].

Как видно из смысла приведенной здесь цитаты, а также из сопоставления с другими высказываниями Энгельса о математике, о мнимой единице, о геометрии, он вовсе не имеет в виду, будто $\sqrt{-1}$ или четвертое измерение не отражают отношений действительного материального мира. Энгельс обрушивается на тех, кто в $\sqrt{-1}$ или в четвертом измерении видит не созданные в нашей голове комбинации, так или иначе отражающие количественные свойства и пространственные отношения ма-

[1] Маркс и Энгельс, Собр. соч., т. XIV, стр. 472.
[2] Там же, стр. 474.

териального мира, а самостоятельные сущности—мнимый мир, четырехмерный мир,—якобы существующие наряду с материальным миром. Насколько глубоко материалистически-диалектический метод Энгельса схватил самую суть пути некоторых естественников к мистицизму, видно из современных теорий «разлетающейся вселенной» Леметра, де Ситтера, Джинса и др. Они переносят с той же легкостью в материальный мир геометрические понятия, созданные в нашей голове (как, например, «конечное пространство»), с какой когда-то Цельнер переносил на металлический шар теоремы, верные лишь в воображаемой четырехмерной аналогии к нашему трехмерному пространству. «Это старая история,—писал Энгельс.—Сперва сочиняют абстракции, отвлекая их от чувственных вещей, а затем желают познавать их чувственно, желают видеть время и обонять пространство»[1].

Как мы уже отметили, абсолютная геометрия является вместе с тем и многомерной геометрией. Например, вместо того чтобы какое-либо событие изучать посредством трех координат положения x, y, z и одной координаты времени t, его изучают в «пространстве» четырех измерений x_1, x_2, x_3, x_4, исходя при этом из интервала ds между этим событием и соседним ему

$$x_1+dx_1, \quad x_2+dx_2, \quad x_3+dx_3, \quad x_4+dx_4.$$

Связь между координатами и интервалом выражается фундаментальной квадратичной формой

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + g_{44}dx_4^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + 2g_{13}dx_1dx_3 + \\ + 2g_{14}dx_1dx_4 + 2g_{23}dx_2dx_3 + 2g_{24}dx_2dx_4 + 2g_{34}dx_3dx_4 = \\ = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu, \\ (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}),$$

где коэфициенты $g_{11}, \dots, g_{34}$ являются функциями от x_1, x_2, x_3, x_4. Аналогично обстоит дело и в случае для пространства с n измерениями.

Геометрия, в основе которой лежит приведенная только что фундаментальная квадратичная форма, называется римановой геометрией. Геометрия Эвклида, геометрия Лобачевского, а также оба вида геометрии, построенной Риманном (эллиптическая и сферическая, которые можно назвать римановой геометрией в узком смысле слова) являются лишь частными случаями римановой геометрии.

Теория инвариантов этой геометрии составляет содержание современного векторного и тензорного исчис-

[1] Маркс и Энгельс, Собр. соч., т. XIV, стр. 355.

л е н и й, о которых мы уже упоминали. Таким образом, векторное и тензорное исчисления представляют собой современный аппарат, заменивший прежние координатные методы в деле изучения геометрических форм при помощи математического анализа. Тем самым выполняется программа построения д и ф е р е н ц и а л ь н о й г е о м е т р и и, начертанная еще в 1827г. Гауссом, причем она распространяется на многомерные пространства теории относительности, волновой механики, на фазовое пространство механики. Объясним сущность этого метода, ограничившись только риманновой геометрией четырех измерений.

Рассмотрим преобразование одной системы координат x^1, x^2, x^3, x^4 в другую x'^1, x'^2, x'^3, x'^4. Значки при x не являются показателями степени, а индексами, но по соображениям, которые станут понятными в дальнейшем, мы пишем их не снизу, а сверху буквы x. Координаты x'^1, x'^2,... являются функциями координат x^1, x^2, ... , т. е. $x'^1 = x'^1(x^1, x^2, x^3, x^4)$, $x'^2 = x'^2(x^1, x^2, x^3, x^4)$, ... , где для простоты, вместо применяемой обыкновенно для обозначения функции буквы f, перед скобкой написана та же буква x'^1, ... Тогда дифференциалы dx^1, dx^2, ... преобразовываются по известному правилу дифференциального исчисления в выражения:

$$dx'^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^3}dx^3 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^4}dx^4 = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^1}{\partial x^\alpha}dx^\alpha;$$

$$dx'^2 = \frac{\partial x'^2}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial x'^2}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial x'^2}{\partial x^3}dx^3 + \frac{\partial x'^2}{\partial x^4}dx^4 = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^2}{\partial x^\alpha}dx^\alpha;$$

. . . . . .

Все четыре уравнения, которые получатся таким образом, могут быть сокращенно написаны как одно, а именно:

$$dx'^\mu = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}dx^\alpha, \quad (\mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

В дальнейшем мы будем везде считать $\mu = 1, 2, 3, 4$, не выписывая отдельно это условие.

Всякая совокупность четырех величин A^μ, переходящая в новой системе координат в совокупность A'^μ по правилу

$$A'^\mu = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}A^\alpha,$$

называется к о н т р а в а р и а н т н ы м в е к т о р о м. Если же мы имеем функцию φ точки, т. е. функцию, которая

имеет в каждой точке определенное значение, не зависящее от системы координат, то величины $\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}$, ... преобразуются по правилу

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^1} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^3} + \frac{\partial x^4}{\partial x'^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^4} = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha};$$

. . . . . .

Все эти четыре уравнения напишем в сокращенном виде как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^\mu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}.$$

Тогда всякая совокупность четырех величин A_μ, переходящая в новой системе координат в совокупность A'_μ по правилу

$$A'_\mu = \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}A_\alpha,$$

называется к о в а р и а н т н ы м в е к т о р о м. Как видно, оба типа векторов отличаются друг от друга положением значка сверху или снизу, и, именно для того чтобы не допускать исключений, мы приняли обозначения dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 для контравариантного вектора dx^μ. В элементарной геометрии нет необходимости различать между этими обоими типами векторов, поскольку там мы имеем дело лишь с прямоугольной системой координат. Примером контравариантного вектора может служить сила, измеряемая как произведение массы на ускорение, а ковариантного—сила, измеряемая как частное при делении работы на перемещение.

Чтобы окончательно перейти к современному исчислению, названному а б с о л ю т н ы м д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы м и с ч и с л е н и е м, введенному Риччи и Леви-Чивита в 1901 г. и развитому дальше Скаутеном, Стройком и др., условимся опускать знак суммирования $\sum$ и писать, например, наше правило преобразования контравариантных векторов просто так: $A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}A^\alpha$, а для ковариантных векторов: $A'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}A_\alpha$.

Запомним, что если в одном и том же уравнении какой-либо значок встречается дважды, то суммирование необходимо производить по всем его значениям от 1 до 4 (значит, в данном случае $\alpha = 1, 2, 3, 4$).

Обобщая эти законы преобразования, мы обозначим через A с двумя значками $\mu\nu$ величину, состоящую из 16 слагаемых, так как μ и ν, независимо друг от друга, могут принимать значения от 1 до 4. Такие величины называются тензорами второго ранга. В зависимости от правила преобразования различают: контравариантные тензоры

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} A^{\alpha\beta},$$

ковариантные тензоры

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} A_{\alpha\beta},$$

смешанные тензоры

$$A'^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} A^{\beta}_{\alpha}.$$

Аналогично можно образовать и тензоры третьего ранга, имеющие 64 слагаемых, и т. д. Так, например, одно уравнение преобразования тензоров четвертого ранга заменяет 256 уравнений, имеющих каждое по 256 членов. Простейшим примером тензора второго ранга является напряжение P в твердом теле. Так, P_{xy} есть y-овая слагаемая давления на элемент поверхности, перпендикулярной к оси x.

Для вычислений с тензорами существует особый тензорный анализ, в котором кроме операций сложения, умножения, дифференцирования тензоров встречается еще операция поднимания и опускания индексов тензоров. Применяя тензорный способ выражения, фундаментальной квадратичной форме можно придать вид $(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$, где $g_{\mu\nu}$ ковариантный тензор. Вместе с контравариантным и смешанным тензорами $g_{\mu\nu}$ и g^{ν}_{μ} они составляют фундаментальные тензоры, которые при умножении на любой тензор дают: $g^{\mu\nu} A_{\nu} = A^{\mu}$, $g_{\mu\nu} A^{\nu} = A_{\mu}$, $g^{\nu}_{\mu} A_{\nu} = A_{\mu}$. Среди символических сокращений, которыми, как видно, изобилует тензорный анализ (что делает его понимание затруднительным), надо указать еще на трехзначковые скобки Кристоффеля

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{g x_{\sigma}}\right),$$

$$\left\{\mu\nu, \sigma\right\} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}}\right).$$

Тензорный анализ и абсолютное дифференциальное исчисление встретили сначала недружелюбное отношение со стороны боль-

шинства математиков, с трудом свыкавшихся с этими новыми методами. Но позже они завоевали всеобщее признание благодаря теории относительности, явившейся основным стимулом их развития. Сейчас они составляют ее единственный математический аппарат. Таким образом, все эти сложные построения, казавшиеся лишь голой математической абстракцией, не могущей иметь какого-либо применения, нашли широкое поле действия в механике, электродинамике и термодинамике релятивистской физики. Материалистическое положение о том, что все правильные математические понятия или системы математических понятий—как бы абстрактны они ни были и как бы ни казались оторванными от материальной действительности—являются порождением этой действительности, отражают ее и в историческом процессе развития математики найдут в ней применение,—снова было подтверждено.

Пространство перестало играть роль пустой коробки, в которой помещен материальный мир, и геометрию больше нельзя было рассматривать, как это делал даже Гаусс, как оторванную от остальных физических закономерностей «физику пространства». Сама эта коробка «жидка», текуча, ее свойства, в каждом месте, зависят от ее «наполнения». Победило гениальное предположение Риманна, утверждавшего, что «основу мероопределений пространства следует, возможно, искать в связывающих силах, действующих на него». Благодаря этому мы не можем произвольно приписывать пространству мероопределения, ибо эти мероопределения, а значит, и вся структура пространства зависят от притяжений, действующих между массами. Эвклидова геометрия потеряла, таким образом, то абсолютное значение, которое приписывали ей Ньютон и Кант. Ее следует рассматривать только как первое приближение, поскольку она является предельным случаем римановой геометрии. В бесконечно-малом риманново пространство не отличается от пространства Эвклида. Значит, в небольших частях нашего пространства и для небольших скоростей (по сравнению со скоростью света) геометрия Эвклида оказывается вполне достаточной.

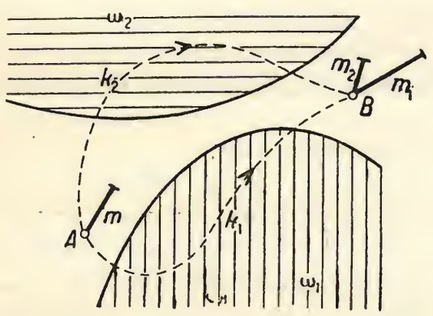
Таким образом, геометрия перестала быть наукой о пространстве: она превратилась в науку о пространствах.

Наряду с геометрией Римáнна были построены и неримановы геометрии. Веблен, Скаутен, Вейль, Картан, Финслер и другие современные математики кладут в их основу не метрику, а бесконечно-малое параллельное перемещение. Блажке была создана аффинная, а Фубини и Чехом проективная дифференциальные геометрии.

Попытки Эйнштейна и его школы в области дальнейшего развития всеобщей теории относительности (1921 г.), попытки

построить «единую теорию поля», которая должна объединить электромагнетизм и гравитацию,—сделали необходимым создание нериманновой геометрии. В отличие от геометрии Риманна в ней нельзя сравнивать длины в разных точках пространства, так как с появлением электромагнитного поля результат сравнения зависит от пути, по которому эти длины приводятся в сравнение.

Простую модель подобного нериманнова пространства мы можем представить в виде неравномерно нагретого листа жести, обладающей чрезвычайно высокой теплопроводностью. Маленький жестяной масштаб будет сохранять свою длину m в точке A, независимо от своего направления. Если мы будем этот масштаб передвигать к точке B, двигаясь при этом по линии k_1, которая проходит через сильно нагретую область ω_1, то он дойдет до B, приняв длину m_1. Если же мы будем его передвигать к точке B по линии k_2, проходящей через холодную область ω_2, то он примет другую длину m_2.



Нериманново пространство

Таким образом, наряду с требованием инвариантности по отношению к системе координат, выдвинутым в теории относительности, было предъявлено еще требование инвариантности по отношению к системе масштабов, к калибровке. Тогда наряду с инвариантными тензорами появились ин-инвариантные тензоры (интензоры), которые не изменяются ни от преобразования координат, ни от преобразования калибровки. Фундаментальный тензор—это эфирное поле $^*G_{\mu\nu}$; он распадается на два слагаемых: 1) потенциал тяготения $g_{\mu\nu}$, определяющий мероотношения, метрику, и 2) электромагнитную силу $F_{\mu\nu}$, соединенные уравнением $^*G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}$.

Построение волновой механики, поиски синтеза квантовой и релятивистской физики, начатые в 1928 г. Дираком, и, наконец, открытие спи́на, т. е. вращения электрона вокруг его собственной оси, привели в самое последнее время к новому обобщению геометрии, к новым, еще более абстрактным пространственным формам. Эренфестом и ван дер Варденом было создано понятие спинора, которое разрабатывается Вейлем, Фоком, Скаутеном, Шрэдингером и другими современными математиками и физиками. Спинор является величиной, имеющей 4^k слагаемых; в простейшем случае это будут ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4. При преобразовании слагаемые спинора преобразуются

линейно. Они переходят в совокупность ψ'_1, ψ'_2, ψ'_3, ψ'_4 по правилу

$$\psi'_\mu = T^1_\mu \psi_1 + T^2_\mu \psi_2 + T^3_\mu \psi_3 + T^4_\mu \psi_4 = \sum_{\alpha=1}^{4} T^\alpha_\mu \psi_\alpha$$

($\mu = 1, 2, 3, 4$), или, по сокращенному начертанию, $\psi'_\mu = T^\alpha_\mu \psi_\alpha$, где коэфициенты T^α_μ являются произвольными функциями. Важнейшее отличие спиноров от тензоров состоит однако в том, что слагаемые спинора являются не вещественными, а комплексными числами. Кроме того, как это вытекает из общих принципов квантовой физики, спиноры следует истолковывать как величины, определяющие не самое вращательное движение электрона, а лишь вероятность того или другого возможного его вращения.

Идя еще дальше по пути обобщений, мы приходим к понятию «абстрактного пространства», лишь слегка опирающегося на наглядные представления о нашем материальном пространстве. «Абстрактное пространство» допускает для своих элементов, «точек», какие угодно, не только геометрические истолкования—цвета́, фазы и т. п.—лишь бы они удовлетворяли некоторым условиям, аналогичным аксиомам геометрии.

Из советских геометров назовем здесь Финикова, работающего в направлении классической диференциальной геометрии, далее Кагана и его школу, а также Бурстина и Широкова, занимающихся многомерной диференциальной геометрией и тензорным исчислением, и, наконец, Глаголева, возглавляющего школу проективной геометрии.

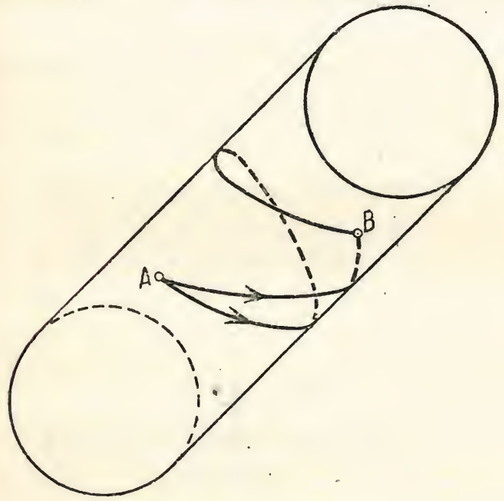
ГЛАВА СЕДЬМАЯ

Геометрия в малом и геометрия в целом.—Основные понятия топологии.—Комбинаторная топология.—Теоретико-множественная топология. —Топологическое пространство, топологические методы и анализ.

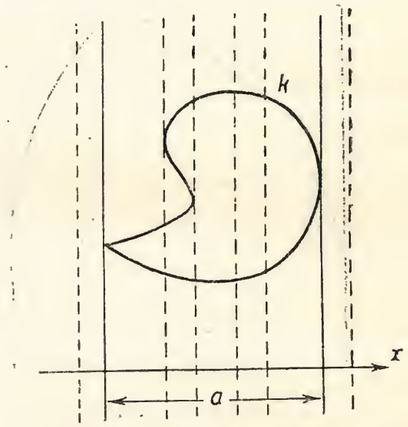
Из предыдущего изложения видно, что все обрисованное нами развитие современной геометрии основывается на применении метода бесконечно-малых к пространственным образам, т. е. на рассмотрении бесконечно-малых областей пространства. Огромные успехи дифференциальной геометрии объясняются тем, что и в бесконечно-малом выявляются многие существенные свойства всей геометрической фигуры в целом, причем так, что они делаются более доступными для исследования.

Однако далеко не все свойства геометрических образов, рассматриваемых как известное целое, могут быть выявлены этим путем. Мы уже знаем, что, например, геометрия на поверхности кругового цилиндра ничем не отличается от геометрии на плоскости Эвклида, если ограничиться одной ее частью, не обходя цилиндр вокруг. Между тем геометрия этой цилиндрической поверхности, взятой в целом, вовсе не похожа на эвклидову геометрию хотя бы уже потому, что между двумя точками A и B здесь будут существовать не одна, а бесконечное количество «прямых», которыми являются все винтовые линии. Или, например, известно, что небольшую часть поверхности шара можно изгибать без растяжения, сжатия и образования складок. Но вместе с тем нельзя изгибать всю поверхность шара в целом, не образуя на ней складок, если она сделана из гибкого, но нерастяжимого материала. Структурные свойства геометрических

образов, взятых как единое целое, рассматривает «геометрия в целом» (Geometrie im Grossen), отличаясь своими методами от «геометрии в малом» (Geometrie im Kleinen), рассмотрением которой мы занимались до сих пор. Геометрию в целом следует, пожалуй, рассматривать и как проявление своеобразного протеста против крайностей, особенно часто встречающихся в абсолютной диференциальной геометрии, где геометрический смысл изучаемых ею многообразий безнадежно теряется в сложном сим-



Геометрия цилиндра



Ширина кривой

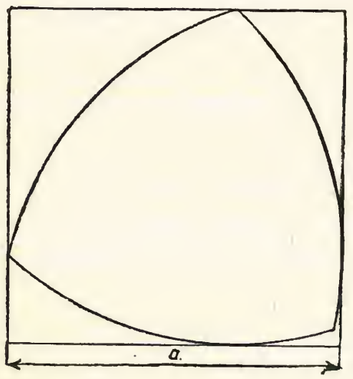
волическом исчислении. Геометрия в целом развита в работах Минковского, Блашке, Либманна, Барбье и др. В качестве примера приведем исследование кривых постоянной ширины, чтобы дать представление об этой относительно молодой области геометрии.

Известно, что для передвижения тяжестей в горизонтальном направлении пользуются иногда не колесами, а цилиндрическими бревнами, на которых тяжесть передвигается, оставаясь на одинаковом расстоянии от мостовой. В то время как колесо должно быть обязательно возможно более точной окружностью, вовсе не нужно, чтобы поперечное сечение таких бревен имело форму круга, ибо центр здесь не играет роли. Для того чтобы передвигаемый предмет не сотрясался, требуется лишь, чтобы сечение каждого из них было кривой постоянной ширины, а этим свойством обладает не только окружность.

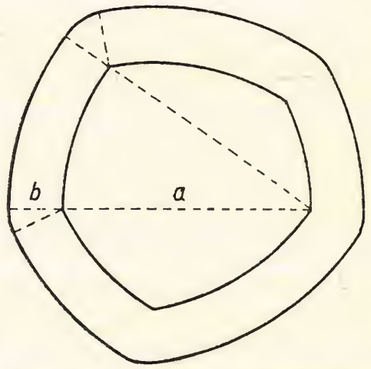
Если опустить из всех точек кривой k перпендикуляры на прямую x, то расстояние a между крайними перпендикулярами мы называем шириной кривой k в направлении x, а крайние перпендикуляры—опорными. Не следует смешивать понятия опорных и касательных, так как возможны касательные,

не являющиеся опорными, и, наоборот, опорные, не являющиеся касательными. Кривые, имеющие во всех направлениях одну и ту же ширину, мы будем называть кривыми постоянной ширины.

Ясно, что окружность является кривой постоянной ширины, равной ее диаметру. Другой пример такой кривой—«равносторонний треугольник Рэло», построенный из трех дуг окружностей, имеющих радиусы, равные a, так, что каждая его вершина является центром противолежащей ей окружности.



Треугольник Рэло



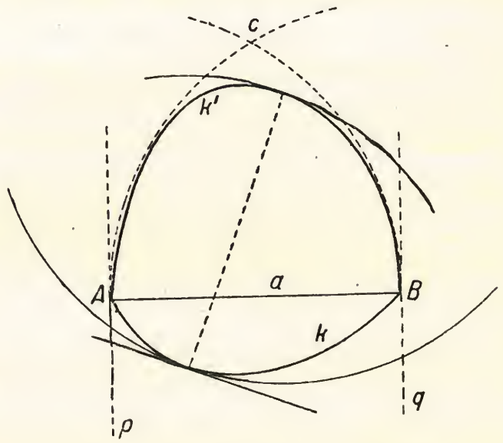
Многоугольник постоянной ширины

Треугольник Рэло можно поместить без прозора внутри квадрата со стороной, равной a, и свободно вращать его в нем. Аналогично из дуг окружностей с радиусами a можно построить 5-ти. 7-ми... и другие нечетные многоугольники постоянной ширины. Если теперь к любой из полученных таким путем кривых провести на расстоянии b параллельную кривую (состоящую из дуг окружностей с радиусами b и $a+b$), то получим кривую постоянной ширины $a+2b$, не имеющую вершин.

Наконец, можно построить кривую постоянной ширины a, не состоящую вовсе из дуг окружностей. С этой целью над отрезком $\overline{AB}=a$ построим перпендикуляры p и q, являющиеся опорными произвольной дуги k, обладающей следующими свойствами: 1) выпуклостью, т. е. вместе с отрезком $\overline{AB}$ она должна образовать такую область, чтобы отрезок, соединяющий две любые точки этой области, целиком в ней умещался; 2) если построить во всех точках дуги k опорные и катить по ним круг с радиусом a, то он должен все время содержать внутри себя дугу k. Тогда опишем из A и B радиусом a дуги окружностей, пересекающиеся в точке C, и получим таким образом выпуклую область, ограниченную дугами k, $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{CA}$. Наконец, из всех точек дуги k опишем круги с радиусами a. Совокупность этих кругов

имеет с указанной только что выпуклой областью общую часть, ограниченную с одной стороны дугой k, с другой—дугой k', которая как раз и дополняет дугу k до кривой постоянной ширины a.

Построение кривых постоянной ширины и изучение их свойств можно производить, как видно, особыми методами, не прибегая к бесконечно-малым. Из этих свойств назовем лишь теорему Барбье (1860 г.), доказанную простым способом Меллитом в 1930 г.: все кривые, имеющие постоянную ширину a, имеют и одинаковый периметр, равный πa. К «геометрии в целом» относится и интересная задача японского математика Какея, где требуется построить на плоскости непрерывную замкнутую кривую, заключающую наименьшую область, так чтобы внутри этой области можно было повернуть отрезок длины a на 360°.



Кривая постоянной ширины

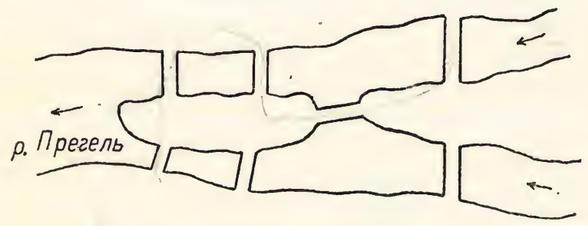
Мы проследили здесь вкратце за развитием в геометрии идей Клейна. Эти идеи настолько преобразовали ее, что в настоящее время геометрия превратилась в теорию инвариантов определенной непрерывной группы преобразований. Характерно, что из сознания многих современных геометров при этом почти выпало, что речь идет о преобразованиях именно пространственных форм.

Но наиболее общим преобразованием, преобразованием, предъявляющим нам наименьшее количество условий, является, как мы уже знаем, топологическое преобразование с определенной группой $\mathfrak{G}_\infty$ бесконечного порядка. Оно допускает любую деформацию пространства за исключением разрывов и склеивания точек. Поэтому понятно, что геометрия этих преобразований, т о п о л о г и я, называемая также analysis situs, получила, особенно с начала XX в., самое широкое развитие.

Первые начатки топологии относятся еще к Эйлеру, занимавшемуся в 1736 г. решением «задачи кенигсбергских мостов». Река Прегель, на которой расположен г. Кенигсберг, образует два рукава и остров. Ее пересекают 7 мостов, расположенных, как указано на чертеже (см. стр. 168). Спрашивается, возможно ли совершить прогулку так, чтобы пройти в с е 7 мостов в любой последовательности, но каждый лишь по одному разу? Эйлер доказал, что сделать это невозможно. Как видно, это тополо-

гическая задача, ибо в ней важны не величина и форма местности и мостов, а только их взаимное расположение. Далее, в 1752 г. Эйлер нашел знаменитую связь между количеством вершин α_0, ребер α_1 и граней α_2 многогранников, а именно формулу $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$. Так как ее доказательство не представляет трудностей и типично для методов, применяемых в топологии, дадим его здесь.

С топологической точки зрения всякий многогранник может быть деформирован так, чтобы его поверхность превратилась в поверхность шара. На нем мы будем иметь словно карту, состоящую из отдельных «стран» в количестве α_2, отделенных α' «границами», которые встречаются в α_0 точках. Чтобы из какой-либо одной страны попасть в другую, необходимо перейти границу. Мы будем всякий раз переходить границу лишь той страны, куда мы еще не попадали, и, таким образом, окажется необходимым перейти $(\alpha_2 - 1)$ границ, что будет как раз достаточно, чтобы перебывать во всех странах. Рассмотрим теперь остальные границы, через которые мы не переходили. Они попрежнему образуют единую связную линию, ибо обратное было бы возможно только тогда, если бы мы в одну и ту же страну попадали два раза, через две различные границы. Эта единая связная линия такова, что из любой ее точки можно попасть в другую лишь одним способом, иначе ведь эта линия была бы замкнутой и ограничила бы страну, в которую мы еще не попадали. Таким образом, количество границ, которые мы не переходили—а из них состоит наша связная линия,—равно количеству вершин, уменьшенных на 1, т. е. $\alpha_0 - 1$, так как каждой границе соответствует в качестве конечной точки одна вершина, при обходе из одной какой-либо вершины. Значит, количество всех границ, как перейденных, так и неперейденных нами, будет равно $\alpha_1 = (\alpha_2 - 1) + (\alpha_0 - 1)$, таким образом, мы получили формулу Эйлера.

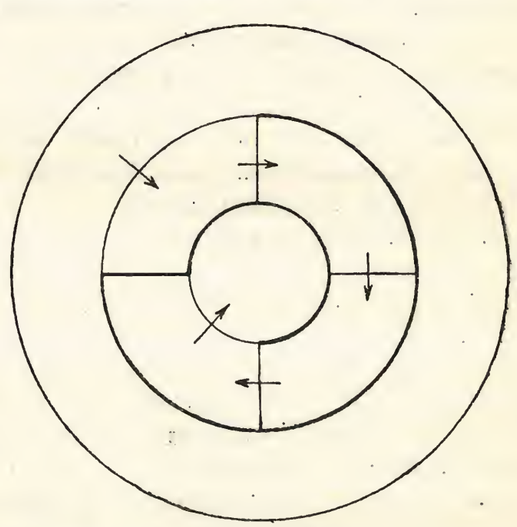


Задача о кенигсбергских мостах

Первая систематическая работа по топологии была опубликована в 1847 г. Листингом, учеником Гаусса, которого натолкнули на эти проблемы потребности различных областей естествознания. Своим дальнейшим развитием топология обязана Риманну, показавшему глубокое значение, которое имеет исследование связности поверхностей для теории функций и всей математики. Над проблемами топологии затем работали

Пуанкаре, Брауэр, Клейн, Бетти, Гурвитц, Веблен и многие другие. После чисто эмпирического подхода, основанного на наглядном рассмотрении моделей, после громоздких попыток представить изучаемые образы аналитическими формулами и извлечь отсюда относящиеся к топологии выводы, в топологии развились два основных направления: комбинаторное и теоретико-множественное.

В комбинаторной топологии геометрические образы изучают как совокупности точек $P_0^1, P_0^2, \ldots, P_0^\alpha$, далее отрезков, образуемых парами точек $(P_0^i, P_0^k)^1 = P_1^i$, $(P_0^i \; P_0^k)^2 = P_1^2, \ldots, P_1^{\alpha_1}$, поверхностей, образуемых отрезками $P_2^1, P_2^2, \ldots, P_2^{\alpha_2}$ и т. д. Каждая такая совокупность описывается посредством определенной комбинаторной схемы, и все встречающиеся в топологии преобразования изучаются путем преобразования этой схемы.


Формула Эйлера

Совокупность точек $P_0^1, P_0^2, \ldots, P_0^{\alpha_0}$ и линий $P_1^1, P_1^2, \ldots, P_1^{\alpha_1}$, соединяющих их так, что через каждую точку проходит по меньшей мере одна линия, называется линейным комплексом C_1, причем, если из любой точки P_0^i в любую точку P_0^k можно перейти по отрезкам комплекса, C_1 называется связным. Комплекс вида $\Pi_1 = \{P_0^1, P_0^2, \ldots, P_0^l; (P_0^1 P_0^2), (P_0^2 P_0^3), \ldots, (P_0^l P_0^1)\}$ называется кругом, а комплекс, не содержащий ни одного круга,—деревом. Комплекс M_1, который или сам является кругом, или возникает из круга путем устранения одного отрезка, называется одномерным многообразием.

Аналогичные понятия вводятся и для двух и больше измерений. Всякий круг Π_1 может образовать поверхности

$$(\Pi_1)^1 = P_2^1, (\Pi_1)^2 = P_2^2, \ldots$$

Совокупность точек $P_0^1, P_0^2, \ldots, P_0^{\alpha_0}$, отрезков $P_1^1, P_1^2, \ldots, P_1^{\alpha_1}$ и поверхностей $P_2^1, P_2^2, \ldots, P_2^{\alpha_2}$, где каждый отрезок лежит по меньшей мере на одной поверхности, называется двумерным комплексом C_2. Среди двумерных комплексов выделяются двумерные многообразия M_2, куда относятся замкнутые поверхности, а также поверх-

ности с краевыми контурами, возникающие из замкнутых путем устранения одной или нескольких, не имеющих общих точек, отдельных поверхностей (например, полусферы или усеченной цилиндрической поверхности).

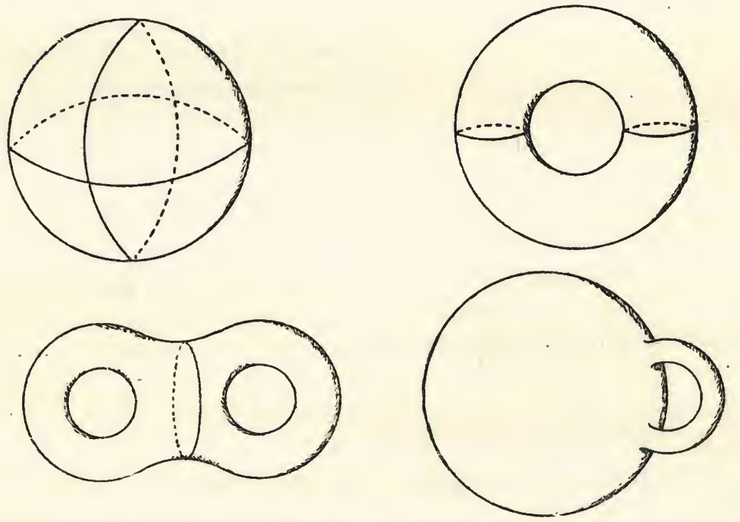
Комплексам C_1, $C_2, \ldots$, можно приписать определенную ориентацию (причем всегда существуют две противоположные ориентации), проводя в отрезке $(P_0^1\ P_0^2)$ различие между его начальной и конечной точками, и определенную ориентацию поверхности в зависимости от ориентации образующего ее круга. Двумерные многообразия делятся на две категории: на ориентируемые многообразия, где каждый отрезок, не являющийся частью краевого контура, получает две противоположные ориентации от обеих частей поверхности, которые он отделяет друг от друга, и на неориентируемые многообразия, где это не имеет места. Простейшее неориентируемое многообразие это известная уже нам лента Мебиуса—поверхность с одним краем.

Важной проблемой топологии является проблема гомеоморфизма. Две геометрические фигуры считаются гомеоморфными, или элементарно родственными, если одна переходит в другую путем внутреннего топологического преобразования. Такое преобразование отрезка $S_1=(P_0^iP_0^k)$ достигается введением новой точки Q_0 и заменой отрезка $(P_0^iP_0^k)$ отрезками $(P_0^iQ_0)$ и $(Q_0P_0^k)$. Преобразование же поверхности S_2 достигается введением нового отрезка $T_1=(P_0^iP_0^k)$, где P_0^i и P_0^k являются точками круга Π_1, образующего поверхность S_2, и заменой поверхности S_2 поверхностями $(T_1\ M_1')$ и $(T_1\ M_1'')$. M_1' и M_1'' являются теми двумя многообразиями, которые образуют вместе круг Π_1 и имеют вершины P_0^i и P_0^k.

Проблема гомеоморфизма состоит в требовании установить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две геометрические фигуры были гомеоморфны. В такой общей постановке проблема представляет громадные, до сих пор еще не преодоленные, трудности. Исходя из этого, нам приходится ограничиться только геометрическими многообразиями. Здесь Брауэром была доказана теорема об инвариантности их размерности, состоящая в том, что два многообразия, обладающие различными размерностями (например, квадрат и куб), не могут быть гомеоморфными. Бетти и Пуанкаре удалось найти инварианты, равенство которых необходимо, для того чтобы два многообразия одной и той же размерности были гомеоморфными, но это равенство не является достаточным.

Лишь для двумерных многообразий — поверхностей—Мебиусом дано полное решение этой проблемы. Инвариантами поверхностей являются: 1) ориентируемость или неориентируемость, 2) количество краевых контуров и 3) род. Для того чтобы

две поверхности были гомеоморфными, они должны быть или обе ориентируемыми, или обе неориентируемыми. Далее, количество краевых контуров r должно быть у обеих поверхностей одним и тем же. Наконец, обе поверхности должны иметь один и тот же род. Чтобы установить это понятие, проведем на данной поверхности замкнутый разрез так, чтобы он не разбивал эту поверхность на две различные области. Если это удастся нам, то проведем второй замкнутый разрез так, чтобы он не пересекал первый и опять не разбивал поверхность. Будем продолжать этот процесс, пока поверхность не распадется. Полученное количество p замкнутых, не пересекающихся и не разбивающих поверхность разрезов и будет ее родом.

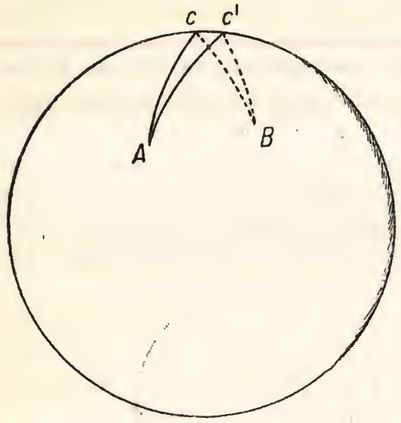


Шар, тор, двойной тор, шар с «ручкой»

Из этих трех инвариантов можно образовать и два других—характеристику и связность. Под характеристикой следует понимать число $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$, где α_0—количество точек, α_1—количество отрезков, α_2—количество площадей какой-нибудь сетки (состоящей, например, из треугольников), наложенной на поверхность. Для ориентируемых поверхностей будет иметь место соотношение $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2-(2p+r)$, а для неориентируемых $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2-(p+r)$. Наконец, под связностью z понимают число $2p+r$ в случае ориентируемых поверхностей и число $p+r$ в случае неориентируемых поверхностей.

Приведем теперь несколько конкретных иллюстраций. Шар, тор и двойной тор (крендель) являются замкнутыми поверхностями, значит, для них $r=0$. Всякий замкнутый разрез разбивает шар на две области, поэтому здесь $p=0$. Чтобы раз-

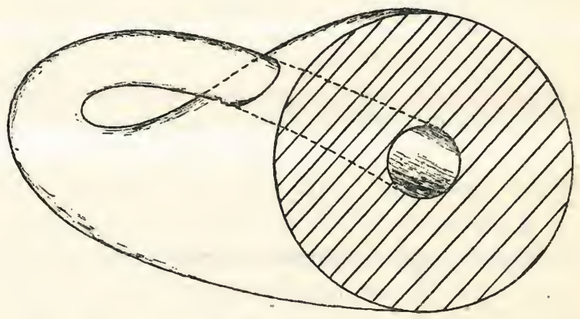
бить тор, необходимы два замкнутых, не пересекающихся разреза, значит, здесь $p=1$. Для двойного тора $p=2$. Если мы наложим на шар сетку, например, экватор и два меридиана, то будем иметь $\alpha_0=6$, $\alpha_1=12$, $\alpha_2=8$; соотношение между характеристикой, равной 2, и обоими инвариантами p и r будет выполнено. Проделаем то же для тора, взяв, например, два его экватора и две образующие его окружности. Тогда получим $\alpha_0=4, \alpha_1=8$, $\alpha_2=4$, характеристика здесь равна 0, соотношение будет опять соблюдено.



Шар с совмещенным надрезом

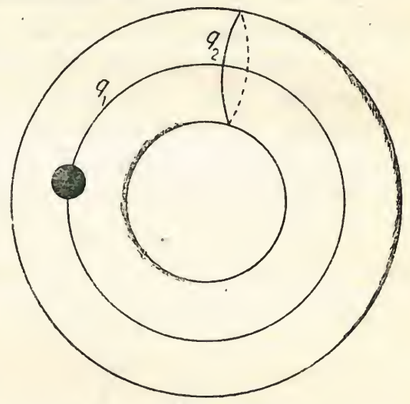
Чтобы получить ориентируемые поверхности с любым p, достаточно прибавить к шару p «ручек». Для получения поверхности с r краевыми контурами достаточно проделать в ней r отверстий.

Что касается неориентируемых поверхностей, то они получаются из шаровой поверхности путем надреза ее по дуге ACB (откуда возникает краевой контур $ACBC'A$) и совмещения дуги AC с другой дугой BC' так, чтобы совпали точки A с B и C с C'. То же самое можно получить, проделав в шаровой поверхности круговую дырку и заклеив ее листом Мебиуса так, чтобы граница листа Мебиуса была склеена с границей дырки. И то и другое одинаково возможно проделать лишь мысленно, а не в действительном трехмерном пространстве, где всякая замкнутая поверхность, не проникающая самое себя, является ориентируемой. Пример замкнутой неориентируемой поверхности, проникающей самое себя в особой линии, показан на чертеже. Неориентируемые, замкнутые, не проникающие самих себя поверхности могут быть построены лишь в четырехмерном пространстве.


Неориентируемая замкнутая поверхность

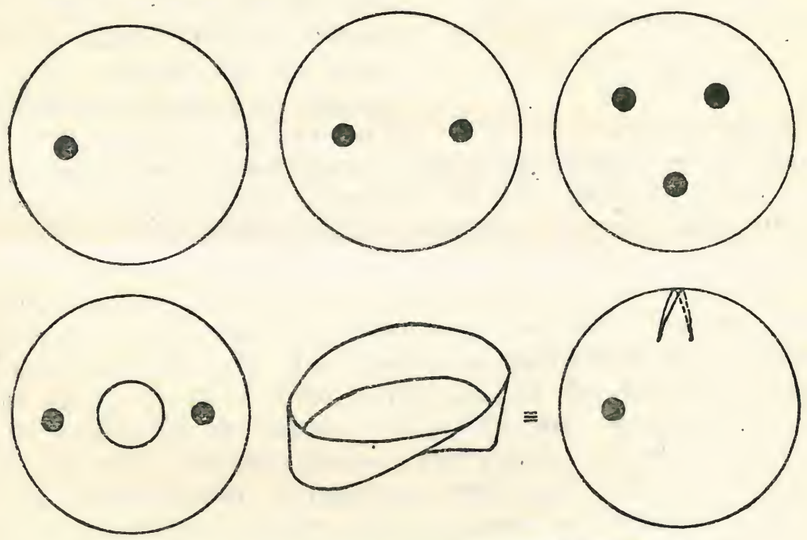
О связности мы получим наглядное представление, введя, по Риманну, понятие поперечного сечения, т. е. разреза, проведенного на поверхности от края к краю. Понятно, что на поверхностях, не имеющих краев, где $r=0$, не может

быть поперечных сечений (например, на шаре). Каждое поперечное сечение уменьшает связность поверхности на единицу. Так, если мы возьмем поверхность тора, снабженного одним отверстием ($p=1, r=1, z=3$), и проведем сначала поперечное сечение q_1, исходящее из края отверстия и возвращающееся в него, а затем второе поперечное сечение q_2, исходящее из q_1, то полученная таким путем поверхность будет иметь $z=1$.



Поперечное сечение

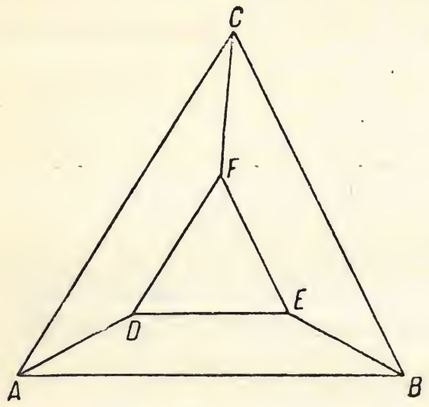
Все возможные, как замкнутые, так и открытые, двусторонние и односторонние поверхности любых родов и с любым количеством краевых контуров могут быть составлены из набора следующих четырех ориентируемых поверхностей: 1) шар с одним отверстием ($p=0$, $r=1$); 2) шар с двумя отверстиями ($p=0, r=2$); 3) шар с тремя отверстиями ($p=0$, $r=3$); 4) тор с двумя отверстиями ($p=1$, $r=2$) и, наконец, неориентируемой поверхности; 5) лента Мебиуса ($p=1, r=1$), которая


Набор для составления поверхностей всех видов

может быть заменена шаром с одним отверстием и надрезом. Иначе говоря, все поверхности могут быть получены из шаровой поверхности следующими операциями, производимыми в конечном числе: 1) прорезывание круглых дырок; 2) приклеивание «ручек» к краям двух дырок; 3) заклеивание дырки

листом Мебиуса. Таким образом, доказано, что все топологически отличные поверхности составляют счетное множество.

Кроме понятия гомеоморфизма, характеризующего геометрические фигуры, взятые сами по себе, с их внутренней стороны, существует группа топологических проблем, в которых геометрические фигуры рассматриваются как части некоторого целого—пространства, в которое они вмещены. При общей постановке этих проблем в n-мерном многообразии (или, в частности, в n-мерном пространстве) рассматривают лежащее в нем m-мерное многообразие (где $m<n$). Брауэр доказал, что всякое топологическое отображение области, лежащей в n-мерном многообразии, будет опять областью этого многообразия, а отображение ее края будет опять краем. К этому кругу идей относится также известная уже нам теорема Жордана о том, что замкнутая, не пересекающаяся кривая, лежащая на плоскости, делит эту плоскость на две раздельные области. Эту теорему можно обобщить и для пространства трех и больше измерений. Сюда же относится и обобщение формулы Эйлера для многогранников в применении к многомерным многообразиям, что приводит к так называемым к о э ф и ц и е н т а м Бетти, являющимся, в свою очередь, обобщением связности поверхностей.

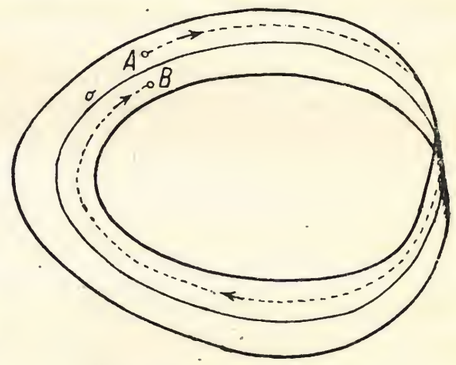


Гомология

Большое значение имеет введенное Пуанкаре понятие г о м о л о г и и. Пусть на каком-нибудь n-мерном комплексе (например, на трехмерном теле многогранника) имеется система двумерных двусторонних многообразий. Их краевые контуры состоят из кругов $\pi_1^1, \pi_1^2, \ldots, \pi_1^n$, которые могут иметь общие точки. Припишем каждой поверхности, входящей в состав любого из наших двумерных многообразий, определенную ориентацию. Тогда придется проходить какой-либо отрезок комплекса, принадлежащий к краю одного из наших двумерных многообразий, иногда α раз в одном, β раз в противоположном направлениях, а значит, всего $\nu = \alpha - \beta$ раз. Таким образом, вся система двумерных многообразий будет иметь край $r\Pi_1^1 + \nu_2\Pi_1^2 + \ldots + \nu_R\Pi_1^n \sim 0$, что читается «гомологично нулю». Так, например, в комплексе *ABCDEF* имеет место гомология $\Pi_1^1 + \Pi_1^2 \sim 0$. На поверхности шара с одним контуром Π_1^1 мы будем иметь гомологию $2\Pi_1^1 + \Pi_1^2 \sim 0$. Понятие гомологии

встречается как раз в тех областях топологии, которые имеют наибольшее значение для применения в механике, теории дифференциальных уравнений, алгебраической геометрии, в вариационном исчислении.

Другие, относительные свойства геометрических образов связаны с деформациями, которые топология рассматривает наряду с гомеоморфизмом, а именно с изотопией и гомотопией. И з о т о п н ы м и в n-мерном многообразии M_n два лежащих в нем m-мерные многообразия M_m^1 и M_m^2 называются тогда, когда они не только гомеоморфны, но могут быть переведены друг в друга путем непрерывной взаимно-однозначной деформации в с а м о м M_n. Например, фигура из двух окружностей, касающихся друг друга во-вне, и фигура из двух окружностей, касающихся друг друг изнутри, не изотопны в плоскости, хотя они гомеоморфны. Далее, в трехмерном пространстве две различно заузленные кишкообразные поверхности не будут изотопны, хотя они гомеоморфны, переходя друг в друга при непрерывной взаимно однозначной деформации в четырехмерном пространстве.



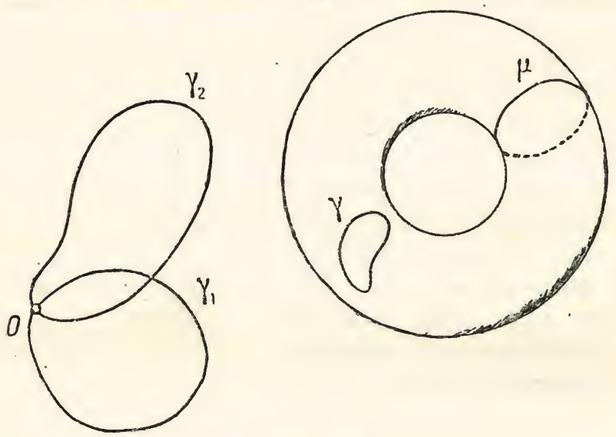
Одностороняя кривая

Ориентируемость и неориентируемость поверхностей, принадлежащая им в качестве их внутренних свойств, влечет за собой и определенные свойства, зависящие от того, в какое пространство эти поверхности вмещены. Это—свойства д в у с т о р о н н о с т и и о д н о с т о р о н н о с т и, известные нам из примеров шара и ленты Мебиуса. В трехмерном эвклидовом пространстве ориентируемые поверхности всегда располагаются двусторонне, а неориентируемые—односторонне.

Замкнутые кривые могут быть только ориентируемыми. Но на поверхности они могут располагаться односторонне или двусторонне в зависимости от того, является ли эта поверхность неориентируемой или ориентируемой. Так, например, средняя линия o на ленте Мебиуса расположена односторонне; если мы выберем точку A, которая, как кажется, находится по одну сторону o, и будем двигаться вдоль o, то придем, не пересекая o, в точку B, находящуюся по другую сторону o. Между тем та же кривая o будет, если ее вместить в плоскость, двусторонней.

В отличие от изотопии, являющейся частным видом гомеоморфизма, г о м о т о п и я не предполагает взаимной однозначности отображения. Два многообразия M_m^1 и M_m^2, находящие-

ся в многообразии M_n, называются гомотопными в M_n, если одно из них может перейти в другое путем непрерывной деформации в самом M_n. Здесь допускается, что две различные точки P_0^1, P_0^1 множества M_m^1 сливаются в одной точке P_0^2 множества M_m^2, т. е. что происходит запрещенное при гомеоморфизме «склеивание» точек. Например, если через точку O многообразия M_n проходят две замкнутые ориентированные кривые γ_1 и γ_2, и если при непрерывной деформации γ_1 переходит в γ_2 так, что начальная и конечная точки при этом остаются неизменными, то можно писать $\gamma_1 \approx \gamma_2$ (читается «гомотопно»). Если какую-либо кривую γ можно путем непрерывной деформации в M_n стянуть в точку, то мы говорим, что она гомотопна



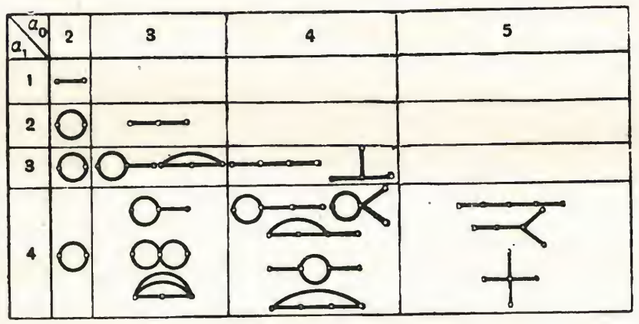
Гомотопия

нулю $\gamma \approx 0$. Так, например, на поверхности тора его меридиан μ не будет гомотопен нулю, между тем как на торе существует сколько угодно кривых γ, гомотопных нулю. Может показаться, что кривая будет тогда и только тогда гомотопна нулю, если она разбивает поверхность на две раздельные области, как это действительно имеет место на торе. Однако это неверно, примером чему служит средний меридиан на двойном торе (см. черт. на стр. 171). Исходя из понятия гомотопии кривых, Пуанкаре ввел понятие фундаментальной группы данного многообразия M_n, которое в дальнейшем Александером, Кнезером и другими было развито и частично расширено и на многообразия с большим числом измерений.

Как видно, топология, исходя из комбинаторного, т. е. по существу из алгебраического, метода, широко развила свои теории. Однако надо признать, что конкретные результаты, полученные этим путем, все же не так уж многочисленны по сравнению с затраченным трудом. Поэтому современная комбинаторная топология начинает отходить от прежней установки,

когда рассматривали точки, отрезки, поверхности и т. д. вовсе не как наглядные пространственные формы, а как «вещи», или, точнее, как названия, с которыми оперируют на основании принятой системы аксиом. При этом забывали, что именно наглядное представление, как это верно замечают Ден и Хегард, «чаще всего являлось руководителем при открытиях и доказательствах, между тем как теоретические обобщения иногда служили лишь догматическим целям» (статья в «Enzyklopaedie der mathematischen Wissenchaften»).

Из конкретных результатов, относящихся к линейным комплексам, укажем лишь на исследования упомянутых



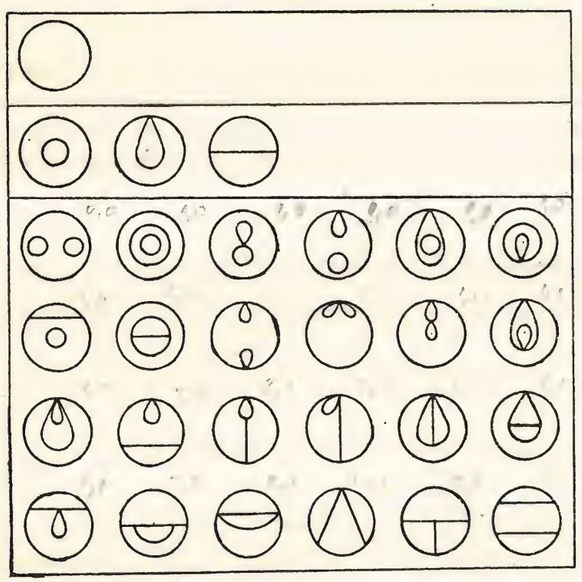
Линейные комплексы

уже «деревьев», т. е. комплексов, не содержащих кругов. Эти исследования имеют значение для органической химии при определении количества возможных изомерных соединений. Если мы вычеркнем в дереве его внешние отрезки, то снова получим дерево. Продолжая вычеркивание тем же путем, мы дойдем, наконец, или до точки—центра дерева, или до отрезка—его оси, найденных Сильвестром.

Полной классификации линейных комплексов и подсчета всех действительно возможных форм мы еще не имеем. Обозначив «степенью» α_0 количество точек, «порядком» α_1 количество отрезков комплекса, мы сообщаем здесь все возможные типы линейных комплексов до четвертого порядка $\alpha_1 = 4$. При этом гомеоморфные комплексы приводятся лишь один раз.

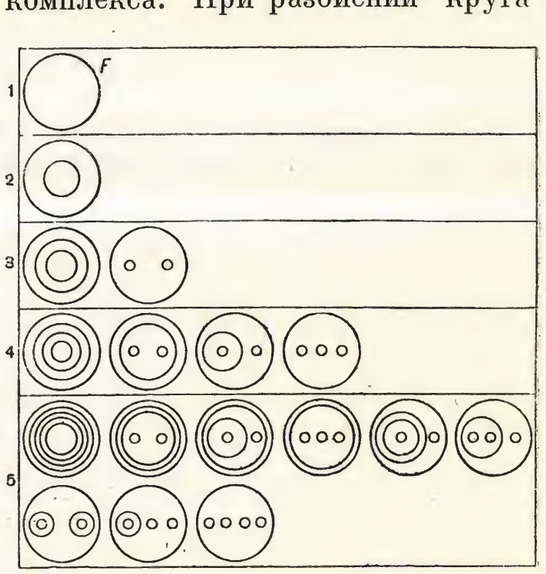
Не разрешена также выдвинутая в 1879 г. Кэли «проблема четырех красок», относящаяся к теории линейных комплексов. Для решения ее требуется доказать, что достаточно четырех красок, чтобы раскрасить все области какой-либо карты (на шаровой поверхности) таким образом, что две любые области, имеющие общую границу, не окажутся окрашенными в один и тот же цвет. Наглядно на опыте видно, что четырех красок действительно достаточно, однако, несмотря на многочисленные усилия, доказательство этого пока не найдено. В то же

время нетрудно доказать, что для этого достаточно пяти красок, а также что необходимо иметь не меньше четырех красок. Иначе обстоит дело, если карта нарисована на поверхности тора. Доказано, что необходимо и достаточно иметь 7 красок для такой ее раскраски.



Разбиения круга

Еще более скудны результаты, относящиеся к двумерным комплексам. Так, если мы возьмем на двусторонней поверхности двумерный, односвязный, ограниченный комплекс, гомеоморфный кругу, то он может быть разбит на две части тремя топологически различными, способами в зависимости от того, имеет ли сечение 2, 1 или 0 точек, общих с контуром комплекса. При разбиении круга на три части необходимы два сечения, которыми могут быть по выбору (2,2), (2,1), (2,0), (1,1), (1,0) или (0,0). При этом еще следует принять во внимание разные случаи возможных совпадений точек, благодаря чему мы получаем 24 различных типа.



Разбиение типа 0

Ограничимся исследованием разбиений, получаемых путем сечений, не имеющих с контуром общих точек и нигде себя не пересекающих (тип 0). Очевидно, что при разбиении круга, ограниченного контуром F, на s частей, внутри него может находиться 1, 2, и т. д., или даже $s-1$ контуров. Если обозначить $\{s\}$ число всех возможных разбиений (типа 0) круга на s частей и если число разбиений

внутри контура F, содержащих 1, 2, ..., $s-1$ контуров, обозначить соответственно

$$\begin{Bmatrix} s \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} s \\ 2 \end{Bmatrix}, \ldots \begin{Bmatrix} s \\ s-1 \end{Bmatrix},$$

то получим:

$$\{ s \} = \begin{Bmatrix} s \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} s \\ 2 \end{Bmatrix} + \ldots + \begin{Bmatrix} s \\ s-1 \end{Bmatrix}.$$

Но число разбиений на s частей с одним контуром внутри F очевидно будет равно числу всех возможных разбиений на $s-1$ частей, т. е.

$$\begin{Bmatrix} s \\ 1 \end{Bmatrix} = \{ s-1 \}.$$

Далее

$$\begin{Bmatrix} s \\ 2 \end{Bmatrix} = \{s-2\}\{1\} + \{s-3\}\{2\} + \{s-4\}\{3\} + \ldots$$

$$\begin{Bmatrix} s \\ 3 \end{Bmatrix} = \{s-3\}\{1\}\{1\} + \{s-4\}\{2\}\{1\} + \{s-5\}\{3\}\{1\} + \{s-5\}\{2\}\{2\} + \ldots$$

$$\begin{Bmatrix} s \\ 4 \end{Bmatrix} = \{s-4\}\{1\}\{1\}\{1\} + \{s-5\}\{2\}\{1\}\{1\} + \ldots$$

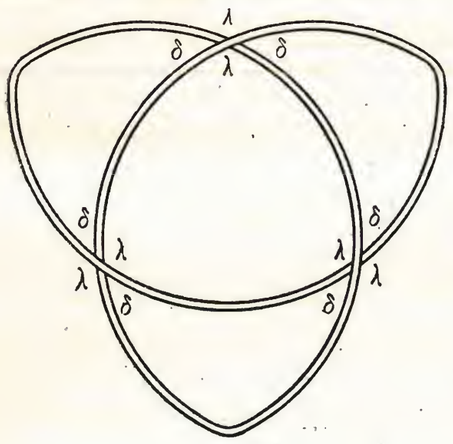
. . . . . .

Таким образом получается рекуррентный процесс, дающий возможность составить таблицу для $\begin{Bmatrix} s \\ n \end{Bmatrix}$ и $\{s\}$, что и было сделано автором[1]. Эти количества с возрастанием s быстро увеличиваются, как видно из приведенной здесь таблицы:

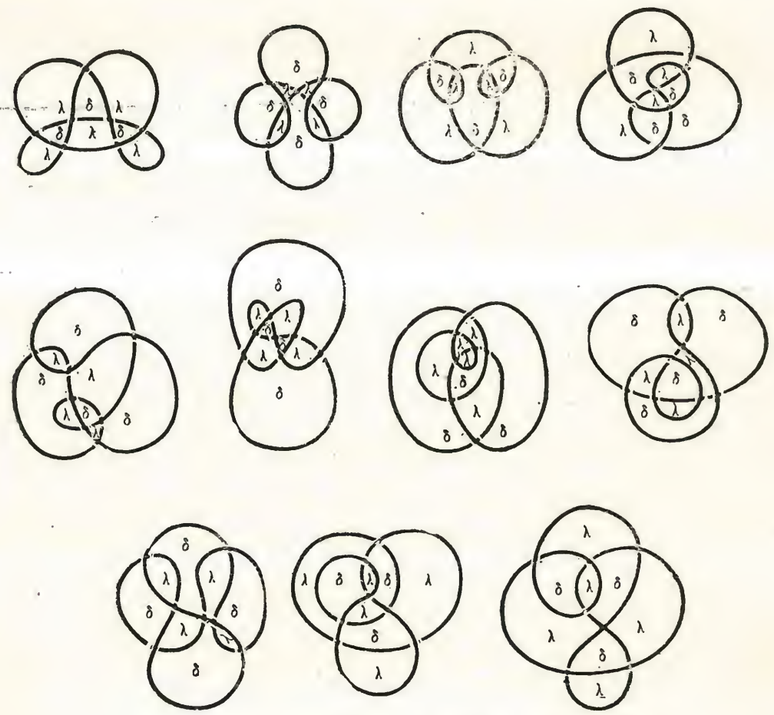
s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\{s\}$	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719	1 842	4 766	12 486	32 953	87 801
n															
0	1														
1		1	1	2	4	9	20	48	115	286	719	1 842	4 766	12 486	32 953
2			1	1	3	6	16	37	96	239	622	1 607	4 235	11 185	29 862
3				1	1	3	7	18	44	117	299	793	2 095	5 607	15 057
4					1	1	3	7	19	46	124	320	858	2 262	6 161
5						1	1	3	7	19	47	126	327	879	2 347
6							1	1	3	7	19	47	127	329	886
7								1	1	3	7	19	47	127	330
8									1	1	3	7	19	47	127
9										1	1	3	7	19	47
10											1	1	3	7	19
11												1	1	3	7
12													1	1	3
13														1	1
14															1

[1] В предисловии к книге Листинга «Предварительные исследования по топологии», ГТТИ, 1932, где применена другая, более громоздкая, символика.

Некоторые результаты достигнуты также в деле изучения изотопии пространственных заузленных кривых, начатого еще Листингом и продолженного Тэтом и другими. Последнего натолкнули на эти исследования работы Томсона о вихревых атомах. Проекция такой кривой на плоскости имеет точки перекрещения и делит плоскость на участки, которые можно разбить на две группы следующим путем. В какой-либо точке перекрещения выберем из обеих ветвей кривой ту, которая проходит н а д другой ветвью. Далее, изберем какое-либо направление движения по этой ветви и назовем углы, встречающиеся слева,—λ, справа—δ. Назовем кривые, в которых все углы каждого участка имеют одинаковый знак, монотипными. Их участки мы будем обозначать символически этим

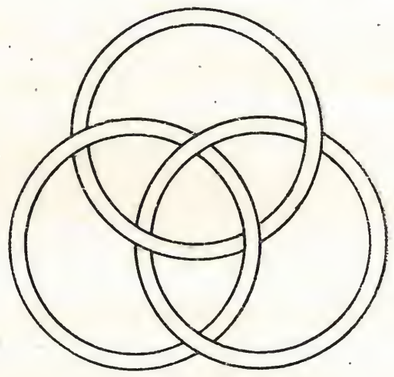


Узел $\begin{Bmatrix} 3\delta^3 \\ 2\lambda^3 \end{Bmatrix}$



Эквивалентные формы узла
$\begin{Bmatrix} \delta^5 + 3\delta^3 \\ \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\delta^4 + 2\delta^3 \\ \lambda^4 + 2\lambda^2 + 2\lambda \end{Bmatrix}$

знаком с показателем в зависимости от количества вершин каждого участка. Таким образом, мы получим следующий символ для монотипной кривой: $\begin{Bmatrix} a\,\delta^n + b\,\delta^{n-1} + \dots \\ a_1\lambda^n + b_1\delta^{n-1} + \dots \end{Bmatrix}$. Как правило, одному и тому же символу соответствует несколько изотопных форм узла, однако Тэт показал, что и неизотопные монотипные узлы могут иметь один и тот же символ. С другой стороны, имеются изотопные узлы, выражающиеся двумя разными символами, и их следует считать эквивалентными. Так, например, символы $\begin{Bmatrix} \delta^5 + 3\delta^3 \\ \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\delta^4 + 2\delta^3 \\ \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 \end{Bmatrix}$ дают 11 различных форм. Исходя из этой несовершенной символики, можно все же наметить некоторые принципы дальнейшей классификации узлов.



Зацепление кривых

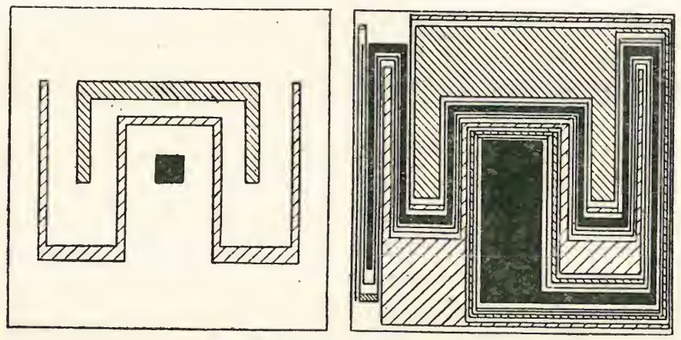
Узел может быть образован также зацеплением двух или нескольких кривых. При трех кривых это возможно даже и тогда, когда ни одна пара этих кривых сама не зацеплена, как это видно на примере с тремя окружностями. Первые исследования узлов, образуемых двумя кривыми, предпринял еще Гаусс. Он открыл, что такие кривые определяют некоторый интеграл, величина которого остается постоянной при изотопном преобразовании этих кривых. Максвэлл показал, что эта величина равна работе, затрачиваемой, когда по одной из кривых проходит электрический ток, а по другой движется магнитный полюс. Брунну удалось определить эту же постоянную просто из числа перекрещений кривых.

Весьма мало разработана теория изотопных поверхностей, где частично изучены лишь «ленты», простейшая из которых—лента Мебиуса. Благодаря своему значению для теории функций комплексного переменного подробно изучены многообразия с особенностями—кратными точками, кратными линиями и т. д. Сюда относятся прежде всего многолистные поверхности Римана, получившие затем, в работах Гурвитца и Вейля, обобщение как «наслоения» на разных двусторонних поверхностях.

В корне отличным от метода комбинаторной топологии является метод теоретико-множественной топологии. Комбинаторная топология имеет то преимущество, что свойства геометрических фигур она выражает посредством символических схем и простых алгебраических операций над этими схемами. Тем самым выявляются те или другие важные свойства фигур, но при этом может остаться не обнаруженной или во всяком

случае менее доступной их микроструктура. Для изучения микроструктуры геометрических образов наиболее приспособлена теоретико-множественная топология, исходящая из понятия точечных множеств.

Первые существенные результаты в этом направлении были получены в 1893 г. Жорданом. Он сопоставил между собой различные определения кривой на плоскости. Такую кривую можно определить как: 1) «длину без ширины», 2) путь движения точки, 3) границу области. При этом он пришел к теореме,



Разбиение квадрата

названной его именем и гласящей, что всякая простая замкнутая кривая разбивает плоскость на две раздельные области, образуя границу этих областей. Но теоретико-множественная топология не занимается только доказательствами подобных «очевидных» истин. Наоборот, зачастую она утверждает парадоксальные, противоречащие «здравому смыслу» положения. Например, трудно представить, что часть плоскости можно разбить, скажем, на три разные области так, чтобы все они имели один и тот же общий краевой контур. Между тем, как показал Брауэр, можно разбить ее даже на бесконечное (счетное) количество разных областей, имеющих один и тот же общий край. На рисунке изображены первые две стадии разбиения квадрата на три области (черную, редко заштрихованную и густо заштрихованную). При продолжении процесса мы получим такое разбиение, при котором в любой окрестности точки края (например, края черной области) будут находиться точки двух других областей, и, значит, в пределе край окажется общим всем трем областям.

Теоретико-множественная топология открыла целый ряд совершенно неожиданных свойств геометрических образов, неизвестных математикам XIX в. Систематическое развитие она получила в особенности после работ Шенфлиса, Фреше (1906 г.), Брауэра (1913 г.), Менгера, советского математика,

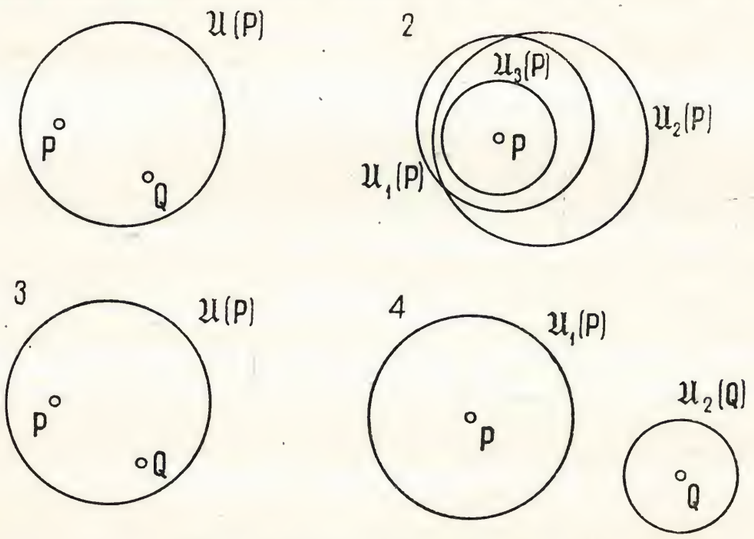
умершего в возрасте 26 лет, Урысона (1898—1924), американцев Александера, Лефшеца, Веблена, Биркгоффа, советских математиков Александрова, Понтрягина и других.

Круг идей теоретико-множественной топологии в корне отличен от круга идей топологии комбинаторной. В теоретико-множественной топологии, рассматривая, например, «многогранники», мы имеем в виду бесконечное множество, элементами которого являются определенные «точки» n-мерного «пространства» $\mathfrak{R}_n$ (под «точкой» мы понимаем совокупность n координат, т. е. n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$). В комбинаторной же топологии алгебраический комплекс вовсе не рассматривается как множество, так как составные его части, так называемые «симплексы»— точки, отрезки, треугольники, тетраэдры и т. д.,—снабжены коэфициентами, показывающими, сколько раз их надо считать в комплексе (между тем, как нам известно, в множестве каждый элемент считается только один раз). Далее, при последовательном развитии комбинаторной топологии никогда не приходится пользоваться понятием предела, в то время как для теоретико-множественной топологии понятие предельной точки является основным.

Уже отсюда понятно, насколько различны оба эти направления. Если комбинаторная топология зачастую подменяла геометрические свойства реального пространства голой комбинаторной схемой, то теоретико-множественная топология допускала по существу ту же ошибку, выискивая все более тонкие, все более удаленные от наглядного представления, парадоксальные свойства вымученных сложнейших «особых случаев». В настоящее время многие математики сознают необходимость органического объединения этих обоих направлений. Так, например, введенное Александровым понятие проекционного спектра не только оправдало себя как аппарат топологического теоретико-группового исследования, но и показало, что теоретико-множественным топологическим исследованиям зачастую недоставало геометрической основы, что и обрекало их на изолированное, а отчасти и малоплодотворное существование. Но все-таки чаще всего и теперь налицо лишь некоторый компромисс между обоими топологическими направлениями; трудности, встречающиеся на пути их объединения, значительны, и для их преодоления сделаны, правда, важные, но все же только первые шаги.

Для сравнения обоих направлений приведем определение гомеоморфизма с точки зрения теоретико-множественной в отличие от данного нами уже раньше определения его с точки зрения комбинаторной. Две фигуры являются гомеоморфными, если одна переходит в другую путем непрерывного и взаимно-однозначного преобразования. При этом каждой точке P' пер-

вой фигуры будет соответствовать одна и только одна точка P'' второй фигуры и обратно: точке P'' второй фигуры будет соответствовать лишь точка P' первой фигуры. Кроме того, если последовательность точек $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$, принадлежащих первой фигуре, имеет предельную точку P', то и соответствующая ей во второй фигуре последовательность точек $P''_1, P''_2, P''_3, \ldots$



Топологическое пространство

будет иметь предельную точку P'', причем она будет соответствовать точке P'.

Новейшее развитие понятия топологического пространства позволяет прямо, не прибегая к понятию окрестности, аксиоматизировать операцию замыкания, являющуюся самой существенной в этом вопросе, и затем, отсюда уже получить понятие окрестности.

Сравнивая оба определения гомеоморфизма—комбинаторное и теоретико-множественное,—мы сразу наталкиваемся на две еще не разрешенные проблемы. Во-первых, требуется указать необходимые и достаточные теоретико-множественные условия, при которых топологическое пространство гомеоморфно многограннику. Во-вторых, требуется указать комбинаторные признаки комплексов, входящих в виде составных частей в многогранники, признаки необходимые и достаточные для того, чтобы они были гомеоморфны топологическому пространству.

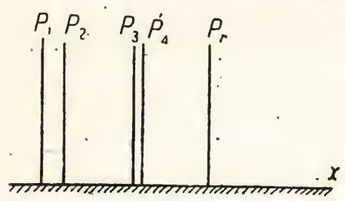
Само понятие топологического пространства было уточнено Гаусдорффом в 1927 г. Согласно ему, для того чтобы точечное множество представляло собой топологическое пространство, требуется выполнение следующих четырех аксиом. 1) Каждая точка имеет свою окрестность. Это значит,

что если дана какая-нибудь точка P, то можно всегда найти такую область $\mathfrak{U}(P)$, заключающую в себе точку P, в которой будет существовать по меньшей мере еще одна точка Q. 2) Если мы построим две окрестности $\mathfrak{U}_1(P)$ и $\mathfrak{U}_2(P)$ одной и той же точки P, то всегда существует ее третья окрестность $\mathfrak{U}_3(P)$, которая содержится как в $\mathfrak{U}_1(P)$, так и в $\mathfrak{U}_2(P)$. 3) Если дана точка P, имеющая окрестность $\mathfrak{U}(P)$ и если мы выберем в окрестности $\mathfrak{U}(P)$ любую точку Q, то окрестность $\mathfrak{U}(P)$ будет окрестностью и точки Q. 4) Если даны две точки P и Q, то для них всегда существуют такие окрестности $\mathfrak{U}_1(P)$ и $\mathfrak{U}_2(Q)$, которые не имеют ни одной общей точки.

Как видно, топологическое пространство не обладает многими свойствами нашего трехмерного материального пространства. В определении топологического пространства ничего не сказано о количестве измерений этого пространства, о возможности производить в нем измерения, о возможности перемещения в нем фигур с сохранением их протяженности, подобия, параллелизма и т. п. В топологическом пространстве сохранены лишь те свойства материального пространства, которые мы называем близостью или соседством и которые выражаются в гомеоморфности геометрических фигур.

Исключительно важно указать, какие дополнительные условия требуются для того, чтобы такое абстрактное топологическое пространство обладало метрическими свойствами, подобно тому как ими обладает наше материальное пространство. Понятие метрического пространства, впервые введенное Фреше в 1906 г., основывается на понятии расстояния двух «точек» P и Q точечного множества. Расстояние определяется здесь как какое-то положительное, вещественное число ρ, существующее для любых P и Q, являющееся их функцией и удовлетворяющее следующим четырем аксиомам; 1) $\rho(P, P) = 0$, т. е. расстояние точки от самой себя равно нулю. 2) Если $\rho(P, Q) = 0$, то $Q \equiv P$, т. е. расстояние между двумя точками только тогда равно нулю, если эти точки совпадают. 3) $\rho(P, Q) = \rho(Q, P)$, т. е. расстояние между двумя точками не зависит от порядка их следования. 4) $\rho(P, Q) + \rho(Q, R) \geqslant \rho(P, R)$, т. е. если даны три точки, то расстояние первой от третьей будет меньше или в крайнем случае равно сумме расстояний первой точки от второй и второй от третьей. Нужно помнить, что под «точками» здесь могут подразумеваться какие угодно элементы. Необходимо также отметить, что в определении метрического пространства не сказано ничего о самом характере функции ρ. Урысоном и Александровым были вскрыты условия, необходимые и достаточные для того, чтобы любое топологическое пространство могло быть метризовано, т. е. стало метрическим пространством.

В абстрактных пространствах вводится ряд дальнейших понятий, например, понятие «диаметра» какого-либо пространства, т. е. максимального «расстояния» двух его «точек». Из любого топологического пространства можно образовать новые топологические пространства выделением из него отдельных частей или, наоборот, присоединением к нему несобственных (бесконечно-удаленных) элементов, а также, следуя общей теории множеств, вводя пространство-сумму, пространство-произведение, пространство-степень и т. д. Наиболее важным понятием является понятие отображения одного пространства на другое пространство, причем из всех отображений особый интерес представляет непрерывное взаимно-однозначное отображение, т. е. гомеоморфизм.



Край площади

Среди всевозможных топологических пространств нам уже наиболее знакомы из комбинаторной топологии n-мерные многообразия: кривые, поверхности и т. д. Мы отметили, насколько, именно благодаря теоретико-множественной топологии, стало возможным уточнение, вплоть до тончайших различий, понятия одномерного многообразия — кривой. Так, сейчас нельзя уже определить кривую просто как «границу области». Оказалось, что область точек на плоскости может иметь весьма причудливые границы, вовсе не напоминающие кривую. Возьмем, например, полуплоскость (т. е. все точки, находящиеся над осью x) и сделаем в точках оси x перпендикулярные надрезы P, которые исключим из нашей области. Избирая точки так, чтобы они имели абсциссы $x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3_2} + \frac{c_3}{3_3} + \dots$, где c_1, c_2, c_3, ... могут принимать только значения 0 или 2, мы получим область, ограниченную множеством, которое будет иметь следующие, кажущиеся противоречивыми, свойства: 1) на любом отрезке оси x будут существовать точки, принадлежащие нашей области; 2) все предельные точки любых последовательностей точек нашей области будут принадлежать этой области; 3) каждая точка нашей области будет предельной точкой.

При построении строго-научного определения n-мерного многообразия приходится поэтому поступать чрезвычайно осторожно. Оставаясь лишь в кругу понятий двумерных многообразий, т. е. поверхностей, можно сказать, что топологическое пространство будет поверхностью при двух условиях: 1) если окрестность $\mathfrak{U}$ любой его точки P будет иметь такую же микроструктуру, как плоскость, 2) если можно будет разбить его на «треугольники» (т. е. гомеоморфные отображения обыкновенных треугольников), которые будут взаимно расположены так же, как ребра обыкновенного многогранника.

Основой для классификации многообразий является теорема Брауэра об инвариантности размерностей. Из нее следует, что при отображении множества точек квадрата на множество точек отрезка (это возможно, так как оба эти множества имеют одинаковую мощность $\mathfrak{c}$) непрерывность этого отображения не сохраняется. К топологически инвариантным свойствам принадлежат, например, замкнутость пространства, его компактность и т. д.

Теорема Брауэра об инвариантности размерностей показывает, что различным значениям размерности n соответствуют и топологически различные типы окрестностей. Отсюда возникает задача изучить более глубоко понятие размерности, понятие, которым пытался овладеть еще Кантор, создав свое учение о мощностях множеств. Другие попытки дать анализ размерности делались Фреше, Пуанкаре и Брауэром, однако лишь Менгер и Урысон, рассматривавшие размерность как микросвойство множества, решительно продвинули эту проблему вперед.

Множество $\mathfrak{M}$ является n-мерным в точке P, если n — наименьшее число, для которого существуют произвольно малые окрестности точки P, ограниченные множествами меньшей, чем n, размерности. Однако кроме этого определения в «малом» существует еще критерий размерности «в целом». Множество $\mathfrak{M}$ является n-мерным, если n наименьшее число, для которого два любых множества, относительно замкнутые в $\mathfrak{M}$, могут быть в $\mathfrak{M}$ отделены друг от друга множеством, имеющим размерность меньше, чем n.

В последние годы проблема размерности поставлена по-новому благодаря работам Александрова, Понтрягина и др. Применяя комбинаторные понятия и построения, удалось показать, что теория размерности не является самостоятельной теорией, а представляет лишь первую главу находящихся только в зачаточном состоянии общих исследований о построениях в замкнутых множествах (в частности о зацеплениях и их инвариантах).

В 1935 г. Александровым была обоснована топология п р е р ы в н ы х пространств и их размерностей. Тем самым перекинут мост к комбинаторной топологии, для которой они должны будут заменить конечную комбинаторную схему, включая ее в общую аксиоматику топологических пространств.

Топологические методы нашли себе широкое применение в ряде других областей математики, прежде всего в теории д и ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й, в в а р и а ц и о н н о м и с ч и с л е н и и, в ф у н к ц и о н а л ь н о м

а н а л и з е. Они применимы везде, где требуется изучить характер ожидаемого решения без предварительного получения этого решения в явной или приближенной форме, т. е. где производятся так называемые качественные исследования. Выражаясь геометрическим языком, эти задачи можно сформулировать как задачи исследования определенных «кривых» на «поверхностях». Так, в небесной механике Пуанкаре была поставлена проблема исследовать форму и расположение замкнутых орбит, что эквивалентно задаче нахождения геодезической замкнутой линии на заданной поверхности. Благодаря топологическим методам Биркгоффу удалось решить многие относящиеся сюда проблемы. Советские математики Люстерник и Шнирельман доказали выдвинутое Пуанкаре предположение, что на любой поверхности жанра 0 существуют три самонепересекающиеся, замкнутые геодезические линии.

Можно, конечно, возразить, что эти методы вскрывают лишь н а л и ч и е тех или других решений, не давая указаний, как эти решения отыскать. Однако так же обстоит дело с целым рядом случаев и в других областях математики. Весь вопрос составляет лишь часть более обширной проблемы о взаимоотношении между теоретической и практической математикой, к освещению которой мы приступаем.

Заключая эту главу о топологии, добавим к уже названным еще несколько имен советских математиков—Немыцкого, Рожанской, Тумаркина, Тихонова, имеющих выдающиеся работы в этой области.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

Теоретическая и практическая математика.—Интерполирование.—Приближенное решение уравнений.—Степенные приближения, способ наименьших квадратов, тригонометрические приближения.—Приближенное решение диференциальных уравнений.—Оценка погрешностей в вычислениях.—Счетные таблицы, приборы, машины, физические методы в математике.—Практическая геометрия, графические методы, номография, начертательная геометрия, пространственные модели.

Нам теперь уже известны основные проблемы современной арифметики, алгебры, анализа и геометрии, а также методы, применяемые для решения этих проблем. Все это взятое вместе составляет круг идей т е о р е т и ч е с к о й «чистой» математики.

Однако каждый в праве спросить, каково значение всего этого сложнейшего и тончайшего строения для практики, какую пользу оно приносит для целей техники и естествознания? Ведь только идеалисты способны утверждать, что математика не порождена практикой и не призвана ей служить. Рожденная будто бы из человеческого духа, она развивается математиками, якобы, для того, чтобы удовлетворять их жажду познания и доставлять им наслаждение изящными логическими построениями.

Ясно, какое грубое смешение причины и следствия, объективного и субъективного допускают математики, рассуждающие подобным образом. Они не понимают, что только неразрывная связь между математикой, с одной стороны, и между естествознанием, техникой, всем развитием производительных сил и производственных отношений, с другой стороны, является двигателем математического прогресса. Всякие же эстетические и другие чувства (правда, вовсе не мало-

важные как индивидуальные творческие стимулы)—это лишь субъективное отражение этих объективных факторов.

Развитие математики двояко связано с развитием естествознания и техники. Математика обязана своим возникновением и развитием естествознанию и технике. И она возвращает им по мере сил этот долг, создавая для них своим методом мощные творческие средства. «Как и прочие науки, математика возникла из потребностей человека: из измерения земли и вместимости сосудов, из исчисления времени и механики. Но, как и во всех областях мышления, отвлеченные от действительного мира законы на известной ступени развития отрываются от действительного мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, по которым должен направляться мир. Так было с обществом и государством; так, а не иначе, применяется впоследствии чистая математика к миру, хотя она и заимствована из этого мира и представляет только часть его составных форм, и, собственно, только поэтому она вообще применима к нему»[1].

Но применение теоретической математики в практике не происходит непосредственно, а через промежуточное звено—практическую математику. Получая в виде конкретных проблем заказы от естествознания и техники, практическая математика вынуждена создавать свои собственные методы, приспособляя для решения каждой отдельной проблемы или группы проблем методы теоретической математики. Отсюда следует, что, хотя практическая математика и не ведет независимого от теоретической математики существования, она все же представляет самостоятельную дисциплину. У большинства современных математиков весьма сильна тенденция противопоставлять друг другу оба эти математических направления. Чтобы правильно понять их взаимоотношение, необходимо прежде всего более глубоко выяснить, что́, собственно говоря, означает поставить и решить какую-либо математическую проблему или задачу.

Мы уже знаем, что предмет математики—количественные отношения и пространственные формы действительного мира—это абстракции, возникающие путем сравнения объектов и отвлечения от ряда их свойств, причем с развитием математики эти абстракции поднимаются на все более высокую ступень. Но естественные науки и техника имеют дело непосредственно с материальными процессами. Правда, теоретическое естествознание, например теоретическая физика, оперирует с абстракциями, вроде «материальная точка», «скорость», «поле» и т. п.,

[1] Маркс и Энгельс, Собр. соч., т. XIV, стр. 39.

но все они наполнены несравненно больше качественным, вещным содержанием, чем абстракции алгебры или даже геометрии. Вот почему математика совершенно иначе, чем естествознание, подходит и к такому важнейшему понятию, каким является понятие точности.

Математику считают обыкновенно точнейшей наукой или даже единственно точной «экзактной» наукой, не подозревая, что теоретическая математика обязана этой славе именно тем, что вовсе не знает понятия точности в том смысле, как оно употребляется в обыденной жизни, а также в естествознании и технике. Когда мы, например, говорим, что точка A лежит на прямой x, находясь от точки O на точном расстоянии, равном a, то «точность» здесь имеет смысл чисто логический: мы сами определили и понятие прямой, и понятие точки, и понятие расстояния, а поэтому, если только эти понятия логически непротиворечивы, то ни о какой неточности не может быть и речи. Совершенно иначе обстоит дело, скажем, в геодезии. Здесь, если я должен поставить метку A на расстоянии, равном a от метки 0 в направлении x, то я имею дело уже не с абстракциями, а с материальными телами и их свойствами. Так, вместо прежней, не имеющей ширины и толщины, прямой я имею теперь стальную ленту, если нахожусь в поле, или, если имею дело с чертежом, карандашную черту, состоящую из несметного количества кристалликов графита. Положение метки A—это результат сложного материального процесса, оно зависит от множества факторов, например, от температуры, влияющей на длину измерительного масштаба, и т. д.. Именно здесь можно и необходимо поставить вопрос о точности данной операции. Поэтому не только естественные науки, но и практическая математика занимаются изучением точности своих результатов. Итак, в теоретической математике, где постулируется «абсолютная точность», собственно говоря, понятия точности не существует. И лишь в практической математике оно приобретает важнейшее значение, становясь доступным оценке и измерению в качестве относительной точности, с которой она решает свои задачи. Поэтому практическую математику также называют аппроксимативной математикой, т. е. математикой приближенных вычислений.

Но чтобы иметь возможность оценивать результаты своих операций, практическая математика должна сначала установить, насколько основные понятия теоретической математики разнятся от действительных объектов, идеализированными снимками с которых они являются. Наряду с критическим пересмотром таких понятий, как функция, кривая, геометрическое построение и т. д., и кроме выработки методов для оценки точности, практическая математика пы-

тается максимально о б л е г ч и т ь т р у д, необходимый для решения математических проблем.

Любая математическая проблема состоит в том, что требуется из какого-то множества $\mathfrak{M}$ объектов выделить подмножество $\mathfrak{N}$ объектов, обладающих определенными признаками. Бывают случаи, когда удовлетворить этому требованию невозможно. Тогда решение проблемы состоит в том, чтобы доказать эту невозможность, доказать, что, допустив существование требуемого множества $\mathfrak{N}$, мы придем к противоречию. Но и в тех случаях, когда проблема имеет решение, иногда бывает достаточно установить это, не давая самого решения, а ограничившись только указанием некоторых его общих признаков (например, указав, что решений несколько). Чаще всего однако таких общих соображений недостаточно, а требуется представить решение полностью, в явном виде. Здесь мы вынуждены проходить несколько этапов, как это видно на следующем примере.

Пусть задано какое-нибудь обыкновенное диференциальное уравнение $f(x, y, y') = 0$. Найти его решение означает найти семейство кривых $F(x, y, C) = 0$, удовлетворяющих этому уравнению, а если заданы еще начальные условия, то избрать из этих кривых ту (или те), которая, скажем, проходит через точку $P_1(x_1, y_1)$. Первая трудность состоит в том, чтобы привести это уравнение к к в а д р а т у р а м, т. е. чтобы выразить связь между y и x посредством к о н е ч н о г о количества операций, среди которых будут и интегрирования. Если мы сумеем эту трудность преодолеть и получим $y = y_1 + \int_{x_1}^{x} \varphi(x)\, dx$ (взяв самый простой случай), то можно будет считать, что задача нами решена лишь с известной точки зрения. Полученное соотношение вскроет нам общий характер связи между переменными x и y, но пока мы не сумеем вычислить входящий в него интеграл, мы не будем в состоянии определить значение y_2, соответствующее какому-нибудь значению x_2. Если мы преодолеем и эту вторую трудность и выразим интеграл к о н е ч н ы м количеством известных нам элементарных функций x^n, e^x, $\log x$, $\sin x$ и т. д., то останется еще третья трудность: найти ч и с л е н н о е значение y_2 для y после того, как мы в правой стороне подставили какое-нибудь определенное значение x_2 для x. Но на этот раз трудность оказывается непреодолимой, ибо в общем случае y_2 будет трансцендентным (иррациональным) числом, и его нельзя будет поэтому выразить к о н е ч н ы м количеством десятичных знаков.

Мы пришли в конце концов к убеждению, что вынуждены отказаться от полного решения проблемы. Преодолев все трудности, мы не сможем выразить результат конечным количеством простейших операций над целыми числами. Отсюда следует, что мы должны удовлетвориться неполным, п р и б л и ж е н н ы м результатом. Не будучи в состоянии выписать бесконечный ряд десятичных дробей, мы обрываем его на каком-либо n-м члене и полученную сумму рассматриваем как приближение искомой величины. Понятно, что, для того чтобы мы имели право так поступать, необходимо иметь доказательство сходимости ряда. Мы должны быть уверены, что опущенная часть ряда, насчитывающая бесконечное количество членов, будет иметь конечное значение. Кроме того следует дать оценку допущенной нами п о г р е ш н о с т и, указав, что опущенный остаток R_n нашего ряда находится в каких-то пределах

$$a < R_n < b.$$

Изложенный пример типичен для многочисленных задач, которые ставят естествознание и техника перед математикой. Он естественно наводит на мысль, нельзя ли от заданного диференциального уравнения $f(x, y, y') = 0$ с начальным условием (x_1, y_1) перейти н е п о с р е д с т в е н н о к отыскиванию п р и б л и ж е н н ы х значений y_2, соответствующих x_2, минуя оба промежуточных этапа: приведение к квадратурам и интегрирование. На деле так именно и поступают в практической математике. Этому посвящена одна из глав ее важнейшего раздела, занимающегося приближенными вычислениями и охватывающего не только анализ, но и алгебру и арифметику.

В нашем примере мы обратились за помощью к приближенному исчислению лишь на последнем этапе, после того как мы преодолели все предыдущие трудности. Понятно, что если бы мы не сумели эти трудности преодолеть, аппроксимативный метод был бы нашим единственным спасением, и полученное приближенное решение—единственно возможным. Может случиться, что нас это не устроит, но не потому, что приближенное решение менее точно, чем решение, выраженное в явном виде в элементарных функциях, так как и последнее ведь только приближенное. Иногда, чаще всего в технических задачах, мы сможем считать решение законченным, если сумеем к любому отдельному x_2 найти соответствующее ему y_2 с заданной точностью. Но зачастую, особенно для теоретического естествознания, важнее прежде всего вывести общий з а к о н связи y и x, и тогда приближенные методы, бессильные дать такое решение, будут играть лишь вспомогательную роль.

Метод приближенных решений связан, как правило, с с о к р а щ е н и е м к о л и ч е с т в а о п е р а ц и й, необходимых для решения, и тем самым содействует рационализации нашего труда. Правда, и теоретическая математика стремится к тому, чтобы

решить любую проблему возможно меньшим количеством операций, добиваясь этим наилучшей обозримости и ясности своих выкладок.

Практическая математика широко пользуется еще одним мощным средством для облегчения труда математиков—механизацией вычислительного процесса.

Простейшим счетным механизмом является таблица умножения, знакомая каждому школьнику. Механизация счета осуществляется здесь благодаря памяти. Аналогичную роль играют и все другие алгоритмы, встречающиеся в теоретической математике. Так, например, чтобы извлечь квадратный корень из какого-либо числа, производят вычисление по определенному, раз навсегда усвоенному предписанию, не подкрепляя это каждый раз заново доказательством. Сюда же относятся разного рода вычислительные таблицы—например, таблицы логарифмов, таблицы тригонометрических и других функций, таблицы простых чисел и т. п., которыми пользуются в математике. В задачу практической математики входит составление подобных таблиц так, чтобы они были максимально приспособлены для целей вычисления.

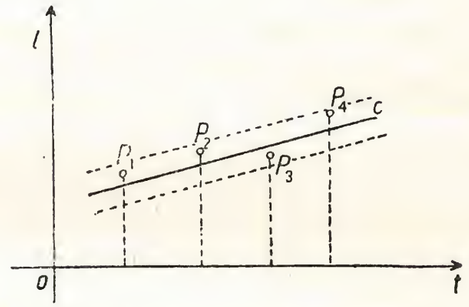
Кроме памяти и таблиц, восполняющих ее, для механизации счета создаются многочисленные вычислительные машины и приборы, выполняющие зачастую сложнейшие математические операции. Как мы убедимся в дальнейшем, физические методы могут быть использованы практической математикой и в более широком смысле.

Геометрия постоянно пользуется наиболее простыми механическими приборами—линейкой и циркулем, и делом практической математики является измерение точности построений, производимых с их помощью. К практической математике относится также учение о графических изображениях—в первую очередь графические методы решения задач, далее, так называемая «начертательная геометрия», изучающая способы изображений трехмерных фигур на плоскости. Наконец, она включает и учение о построении моделей пространственных фигур.

Среди этого обилия ответвлений, которые имеет современная практическая математика, остановимся прежде всего на вопросах, связанных с сопоставлением ее отдельных понятий с понятиями теоретической математики.

Для естествознания и техники первостепенное значение имеет изучение функций. Когда физик устанавливает функциональную зависимость между температурой нагрева t и длиной l металлического стержня в виде уравнения $l = l_0 + \alpha t$, где l_0—длина стержня при температуре $t_0 = 0$, и α—постоянная величина, названная коэфициентом растяжения, то для какого-то

конечного множества измеренных им температур $t_1, t_2, \ldots, t_n$ он измеряет соответствующие им длины стержня $l_1, l_2, \ldots, l_n$. После этого он строит диаграмму, нанося на нее пары значений $(t_1, l_1), (t_2, l_2), \ldots, (t_n, l_n)$ в виде точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$, в прямоугольной системе координат с произвольно избранными им масштабами для осей t и l. «На-глаз» или посредством одного из способов, о которых речь будет ниже, он соединяет точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ линией c, которая окажется близкой к прямой. Но на самом деле температура t_1, а также и длина l_1 установлены лишь приближенно. Осознав это, он должен был бы вместо каждой из точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ отмечать на диаграмме целые прямоугольные области, и, таким образом, он получил бы целую полоску. Этим произвол в выборе линии был бы еще усилен.



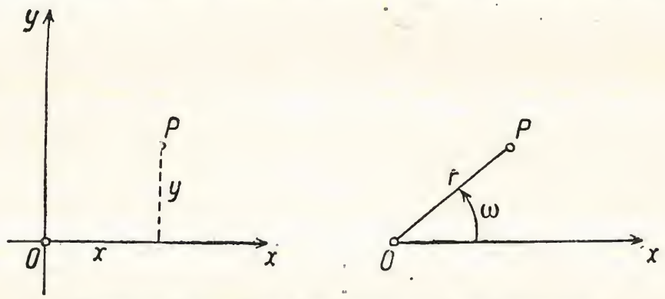
Закон растяжения стержня

Чем руководствуется физик, вычерчивая линию c? Во-первых, он стремится к тому, чтобы она по возможности проходила через наибольшее количество точек P или как можно ближе к ним. Во-вторых, он старается придать линии c наиболее «привычный» вид, т. е. вид тех кривых, которые он изучал: прямой, параболы, логарифмической кривой и т. п. Но так как эти два устремления, как правило, не могут быть одновременно полностью реализованы, он прибегает к компромиссу, и находить такой компромисс учит его практическая математика.

При этом с нашим физиком происходит чудесное превращение. Он забывает, что это он сам только что заменял прямоугольные области точками и целую полоску линией, притом одной из бесконечного множества возможных линий, выбирая ее по привычке. Он считает само собой разумеющимся, что наиболее привычное ему должно быть и наиболее простым и наиболее распространенным в природе. И он «открывает» в природе «закон экономии мышления», по которому зависимости между естественными явлениями выражаются будто бы в наиболее простых формулах. Вздорность этой махистской выдумки, повторяемой на все лады вслед за Пуанкаре многими из современных естественников и математиков, станет особенно очевидной, если мы вспомним, что в полученный «простой» закон $y = f(x)$ входит произвольная система координат. При выборе другой системы координат (например, если мы возьмем вместо прямоугольной системы координат x, y полярные координаты

ω, r, где положение точки P определяется ее расстоянием r от полюса 0 и углом ω отрезка $\overline{0P}$ с осью x) мы получим совершенно другой закон.

Какие же кривые наш физик считает наиболее «простыми»? Кривые, которые 1) непрерывны и 2) гладки, т. е. имеют по меньшей мере первую производную. Но мы уже знаем, что множество непрерывных функций представляет лишь исключение среди гораздо более мощного множества прерывных функций. Кроме того из непрерывности функции вовсе не обязательно следует, что она имеет производную: этим свойством обладает



Прямоугольные и полярные координаты

гораздо более узкий класс функций—аналитические функции. Совершенно ясно, что в рассуждениях нашего физика мы собственно встречаемся с процессом, известным нам из истории развития физики. Наиболее привычные нам механические явления—действия наших мускулов—физики XVII в., ошибочно считая их наиболее простыми и распространенными, перенесли на всю природу и создали тем самым механическую картину мира.

Было бы однако неправильно думать, что раз наш физик, вводя вместо полоски кривую, допускает известное упрощение и вносит сюда некоторый произвол, то надо отказаться от теоретической математики и строить с самого начала математическую науку на понятиях небольших телец вместо точек, проводов вместо прямых и т. д. Это точка зрения грубого, реакционного эмпиризма, не только не имеющая ничего общего с диалектическим материализмом, но и прямо противоположная ему. Характерно, что в настоящее время германские фашисты вроде Динглера (1933 г.), а также итальянские вроде Маниà (1935 г.) пытаются строить именно такую «реальную» или «естественную» геометрию, используя при этом в своих целях работы датского математика Хьельмслефа, относящиеся к 1916 г. На этом мы остановимся подробнее в заключительной главе.

Однако, независимо от тех или других философских выводов, физик ставит перед математиком задачу дать п р и б л и ж е н н о е п р е д с т а в л е н и е функции, если ее отдельные точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ известны. В качестве функции, которая должна представить незнакомую функцию, выбирают обыкновенный многочлен $P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$. Будучи n-й степени, он имеет к о н е ч н о е количество членов. При этом само понятие приближения может толковаться по-разному, а именно, как и н т е р п о л и р о в а н и е, к а к с р е д н е е с т е п е н н о е п р и б л и ж е н и е и к а к р а в н о м е р н о е п р и б л и ж е н и е.

Под и н т е р п о л и р о в а н и е м понимают нахождение такого многочлена $P_n(x)$, который давал бы кривую, действительно проходящую через все точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Интерполирование называют иногда также умением читать «между строк» математических таблиц, так как оно дает возможность с некоторым приближением вычислять промежуточные значения по значениям, приведенным в таблицах. Так, например, если мы в таблицах пятизначных логарифмов находим:

x	$\log x$
3,141	0,49707
3,142	0,49721

то взамен функции $\log x$ мы интерполируем ее многочленом первой степени $3{,}141 + 0{,}14\,x$. Здесь коэфициент

$$0{,}14 = \frac{0{,}49721 - 0{,}49707}{3{,}142 - 3{,}141}.$$

Но, конечно, это крайне простой случай. Вообще же приходится употреблять многочлены n-х степеней и пользоваться значительно более сложными формулами. Первые интерполяционные формулы были известны еще в 1670 г. Грегори, учителю Ньютона, а затем развиты Ньютоном, Лагранжем, Бесселем, Гауссом и др, В новое время задача интерполирования была значительно обобщена Эрмитом (1878 г.), который указал, как построить $P_n(x)$ так, чтобы кривая не только проходила через точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$, но имела в них еще и заданные значения первых, вторых и т. д. производных.

Весьма важны для интерполирования и вообще для приближенного представления функций п о л и н о м ы, построенные в 1853 г. знаменитым русским математиком П. Л. Чебышевым и названные его именем. Среди всех многочленов степени n вида

$$x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}x + c_n$$

многочлен

$$T_n(x) = \frac{1}{2n}\left[(x + \sqrt{x^n - 1})^n + (x - \sqrt{x^n - 1})^n\right] = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$$

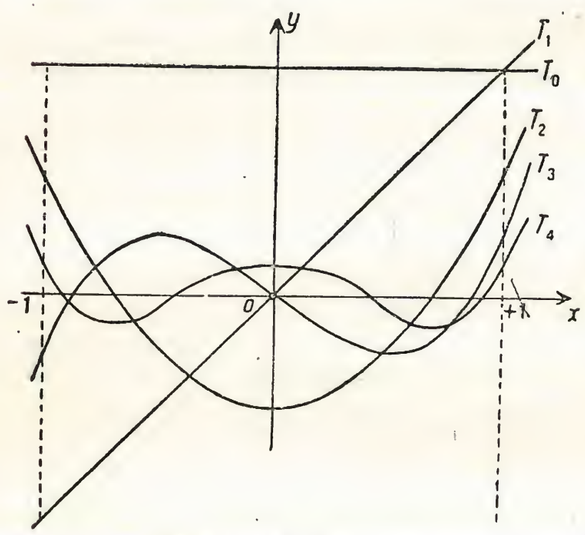
имеет то свойство, что в промежутке от —1 до +1 его значение наименее уклоняется от нуля. Для первых пяти значений полиномы Чебышева имеют вид

$$T_0(x_0)=1;\ \ T_1(x)=x;\ T_2(x)=x^2-\frac{1}{2};\ \ T_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x;$$

$$T_4(x)=x^4-x^2+\frac{1}{8};\ \ T_5(x)=x^5-\frac{20}{16}x^3+\frac{5}{16}x,$$

а соответствующие им максимальные уклонения от 0 (являющиеся наименьшими из всех возможных) будут

$\Delta_0=1;\ \Delta_1=1;\ \Delta_2=0{,}5;\ \Delta_3=0{,}5;\ \Delta_4=0{,}707;\ \Delta_5=0{,}256.$



Полиномы Чебышева

Чебышев применил свои полиномы для построения спрямляющих механизмов, наилучшим способом переводящих круговое движение в прямолинейное,—задачи, актуальной при тогдашнем состоянии теории паровых машин.

Советским математиком Гончаровым в 1930 г. была разрешена задача интерполирования последовательными производными. Так, например, если требуется найти кривую, проходящую через точки

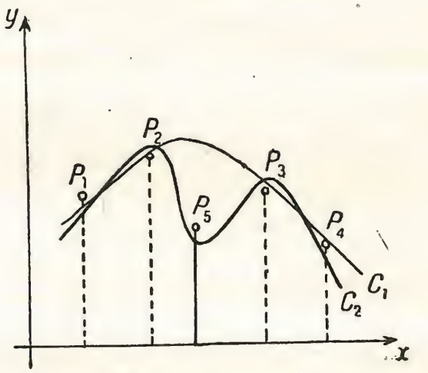
$$x_1=0,\ y_1=0;\ \ x_2=1,\ \ y_2'=0;\ \ x_3=-1,\ \ y_3''=0;\ \ x_1=0,\ \ y_1'''=6,$$

то мы получаем ее приближение с помощью многочлена третьей степени

$$P_3(x)=x^3+3x^2-9x.$$

С формально-математической точки зрения в понятие интерполяции включается и экстраполяция; к ней мы вынуждены прибегать тогда, когда требуется определить ход кривой вне интервала, на котором лежат точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$. По существу же разница между интерполированием и экстраполированием носит принципиальный характер. Интерполируя, мы можем уменьшить допускаемую при этом погрешность введением новых дополнительных данных. Так, например,

если не ясно, будет ли определяемая точками P_1, P_2, P_3, P_4 кривая иметь вид c_1 или c_2, то, установив добавочно положение точки P_5, мы решим вопрос. Однако, если кривая изображает какую-то закономерность, выводимую из экспериментальных данных, то установление положения точки P_5 будет возможно лишь в пределах наблюдений. Таким образом, результаты экстраполяции мы можем считать достоверными только тогда, когда знаем, что и вне интервала наблюдений действует та же закономерность, что и внутри него. Но убедиться в этом мы можем не формально-математическим путем, а только путем анализа по существу тех конкретных процессов, которые мы изучаем. Игнорирование этого положения приводит к грубейшим ошибкам.



Интерполяция

Метод интерполирования применяется к линейным функционалам — в первую очередь к приближенному вычислению производных, а также нахождению приближенных значений определенных интегралов от заданных функций. Наиболее известны формула трапеций, когда кривую просто заменяют многоугольником, составленным из хорд, и формула Симпсона (1743 г.), когда дуги кривой заменяют параболами. Посредством приближенного интегрирования Стирлингом было найдено (1730 г.) приближение

$$n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}\right),$$

уточненное Форсайтом (1883 г.)

$$n!\approx\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sqrt{n^2+n+\frac{1}{6}}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Формула Стирлинга имеет большое значение для вычисления факториалов больших чисел, встречающихся в теории вероятностей.

Особенно важно применение интерполирования для приближенного решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Если требуется определить значение x, удовлетворяющее уравнению $f(x)=0$, то это равносильно задаче найти точки пересечения кривой $y=f(x)$ с осью x. Значит, уравнение $f(x)=0$ можно решить графическим методом, вычерчивая возможно точнее кривую $y=f(x)$. Однако этот метод, не дающий

достаточно точных результатов, годен только для предварительного расчета. Поэтому обыкновенно пользуются одним из методов числового (нумерического) решения. Подобные методы были известны еще индусам и арабам, однако они чрезвычайно кропотливы. Со времени Ньютона существуют способы вычислений, более быстро ведущие к цели. Их сущность заключается в том, что между двумя точками A и B, которые стараются подобрать поблизости от искомой точки пересечения, кривую $y=f(x)$ заменяют хордой или касательной и, повторяя, или, как говорят, итерируя, этот процесс, «подбираются» постепенно все ближе к разыскиваемой точке. Так, например, чтобы решить уравнение $x^3-2x-5=0$, принимают сначала $x_A=2$, откуда $y_A=2^3-2\cdot 2-5=-1$, потом $x_B=3$, откуда $y_B=3^3-2\cdot 3-5=16$. Хорда $\overline{AB}$ пересечет ось x в точке A_1', для которой $x_{A'}=2-\frac{(3-2)-1}{16-(-1)}=2{,}06$. Ей соответствует на кривой точка A′, имеющая $y_{A'}=-0{,}378$. Повторив этот процесс еще раз, получим следующую итерацию $x_{A''}=2{,}094$, $y_{A''}=-0{,}006$, а затем при следующем повторении с большой точностью $x_{A'''}=2{,}09455$, $y_{A'''}=0{,}0005$.

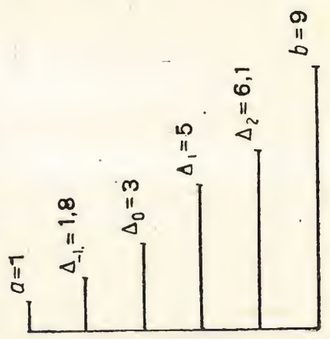
Среди разнообразных приближенных методов выделяется метод, открытый независимо от других математиков Лобачевским в 1834 г. Этот метод дает возможность одновременно найти все корни данного алгебраического уравнения, в том числе и комплексные, не требуя при этом их предварительного приближенного отгадывания. Он основывается на том, что из данного уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ образуют другое так, чтобы его корни были очень высокими степенями корней заданного уравнения. В таком уравнении корни отдалены на больших расстояних друг от друга и поэтому могут быть определены одновременно. Этот же метод был приспособлен Полиа (1915 г.) и для нахождения корней функций, данных в виде бесконечного ряда $0=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ Другой метод для вычисления наименьшего корня такого ряда был предложен в 1918 г. Уиттекером, в виде ряда

$$x=-\frac{a_0}{a_1}-\frac{a_0^2\cdot a_2}{a_1\cdot\begin{vmatrix}a_1a_2\\a_0a_1\end{vmatrix}}-\frac{a_0^3\cdot\begin{vmatrix}a_2a_3\\a_1a_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1a_2\\a_0a_1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_1a_2a_3\\a_0a_1a_2\\0\ a_0a_1\end{vmatrix}}-\frac{a_0^4\cdot\begin{vmatrix}a_2a_3a_4\\a_1a_2a_3\\a_0a_1a_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1a_2a_3\\a_0a_1a_2\\0\ a_0a_1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_1a_2a_3a_4\\a_0a_1a_2a_3\\0\ a_0a_1a_2\\0\ 0\ a_0a_1\end{vmatrix}}-\ldots$$

Мы уже указали, что можно найти приближение кривой не только путем интерполяции, но и путем среднего степенного приближения. Понятие среднего степенного приближения основывается на обобщении понятия средних величин, взятого из арифметики. Если a и b

два положительных числа, причем $a\leqslant b$, то под средней порядка s понимают число $\Delta_s=\left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}$. Для $s=1$ получается средняя арифметическая $\Delta_1=\frac{a+b}{2}$, для $s=-1$ средняя гармоническая $\Delta_{-1}=\frac{2ab}{a+b}$, для $s=2$ средняя квадратическая $\Delta_2=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, а когда s стремится к нулю — средняя геометрическая $\lim\limits_{s\to\infty}\Delta_s=\sqrt{ab}$. Так, например, если $a=1$, $b=9$, то получим $\Delta_{-1}=1{,}8$, $\Delta_0=3$, $\Delta_1=5$, $\Delta_2=6{,}1$.

Если какая-либо функция $y=f(x)$ должна быть изображена посредством многочлена $y=P_n(x)$, то при среднем степенном приближении требуется, чтобы интеграл $\int|P_n(x)-f(x)|^s\,dx$, взятый в данном интервале, имел минимальное значение. Этот интеграл представляет собой интегральную среднюю порядка s. Если $s=1$, то мы получаем о нем наглядное геометрическое представление как о площади, заключенной между кривыми $y=f(x)$ и $y=P_n(x)$, которая должна стать минимальной.



Средние

Как мы увидим в главе о теории вероятностей, из всех средних степенных приближений наибольшее значение имеют средние квадратические приближения. Метод такого приближения функций—способ наименьших квадратов, впервые предложенный Лежандром в 1806 г.,—применяется для выравнивания результатов наблюдений. Если, например, имеются полученные при каком-либо наблюдении или эксперименте данные

x	0	1	2	3	4
y	1	2	2	1	2

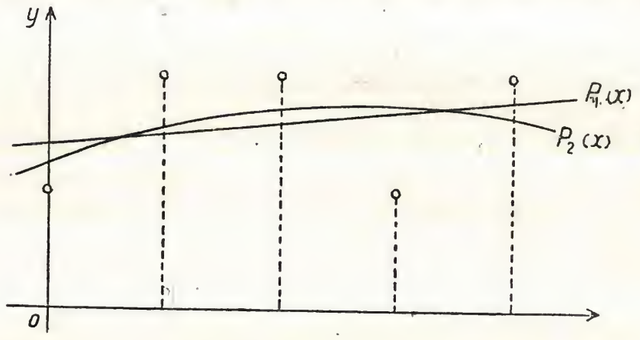
то, выравнивая их способом наименьших квадратов посредством многочлена первой степени, получим $y=P_1(x)=0{,}1x+1{,}4$, а посредством многочлена второй степени $y=P_2(x)=-0{,}07x^2+0{,}38x+1{,}26$.

Особенность задачи состоит в том, что, например, для определения двух неизвестных коэфициентов p и q в многочлене $y=px+q$ имеется целых пять уравнений, которые получаются, если подставить вместо x и y данные нам величины.

Пусть дана подобная система уравнений

$$a_1p + b_1q + l_1 = 0$$
$$a_2p + b_2q + l_2 = 0$$
$$a_3p + b_3q + l_3 = 0$$
$$a_4p + b_4q + l_4 = 0,$$

где количество уравнений (4) п р е в ы ш а е т количество неизвестных (p и q). Не имея возможности определить p и q так,



Выравнивание способом наименьших квадратов

чтобы они в точности удовлетворяли этой системе, подыщем их значения так, чтобы сумма квадратов

$$(a_1p + b_1q + l_1)^2 + (a_2p + b_2q + l_2)^2 + (a_3p + b_3q + l_3)^2 + (a_4p + b_4q + l_4)^2$$

была минимумом. Диференциальное исчисление учит, что минимум наступит тогда, когда частные производные этого выражения по p и q будут равны нулю. Это приводит к уравнениям:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)\,p + (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)\,q + (a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3 + a_4l_4) = 0,$$

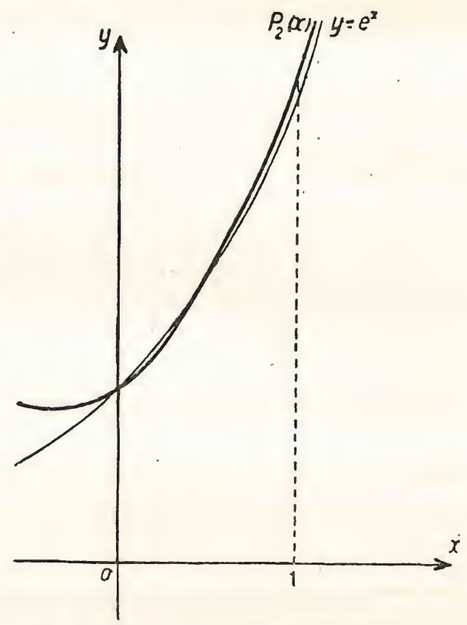
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)\,p + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)\,q + (b_1l_1 + b_2l_2 + b_3l_3 + b_4l_4) = 0.$$

Такие уравнения называются н о р м а л ь н ы м и. Встречающиеся в них коэфициенты обозначают, следуя Гауссу, сокращенно, а именно квадратными скобками:

$$[aa]\,p + [ab]\,q + [al] = 0,$$
$$[ab]\,p + [bb]\,q + [ll] = 0.$$

Решив эти уравнения, мы получаем p и q. При большом количестве начальных данных или неизвестных вычисление квадратных скобок и решение нормальных уравнений связано с довольно громоздкими выкладками, для облегчения и проверки которых существуют особые приемы. В случае когда неизвестные входят в уравнения не линейно, а также когда они взаимно связаны, задача выравнивания соответственно усложняется.

Наряду с методом наименьших квадратов, играющим огромную роль в численной обработке результатов измерений, особенно в астрономии и геодезии, были предложены и другие методы. Так, еще в 1799 г. Л а п л а с предложил способ м и н и м а л ь н о г о п р и б л и ж е н и я, при котором в случае выравнивания многочленом $y = px + q$ требуется определить неизвестные p и q так, чтобы наибольшее из выражений $|a_1p + b_1q + l_1|$, $|a_2p + b_2q + l_2|$,... получило наименьшее значение. Но требование это приводит к вычислениям настолько сложным, что даже после упрощения его де-ла Валле Пуссеном (1911 г.) этот метод минимального приближения не применяется на практике. Так же редко применяется и способ Эджеуорта (1887 г.), где p и q должны быть подобраны так, чтобы сумма абсолютных значений $|a_1p + b_1q + l_1| + |a_2p + b_2q + l_2| + \ldots$ была минимальной.



Минимальное приближение

Выравнивание способом наименьших квадратов отдельных дискретных (прерывно расположенных) точек является лишь наиболее простым случаем среднего квадратического приближения функций. Пусть, например, требуется подобрать многочлен $P_2(x) = a + bx + cx^2$ так, чтобы он в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ приближенно изображал функцию $y = e^x$. Тогда интеграл

$$\int_0^1 [a + bx + cx^2 - e^x]^2\,dx$$

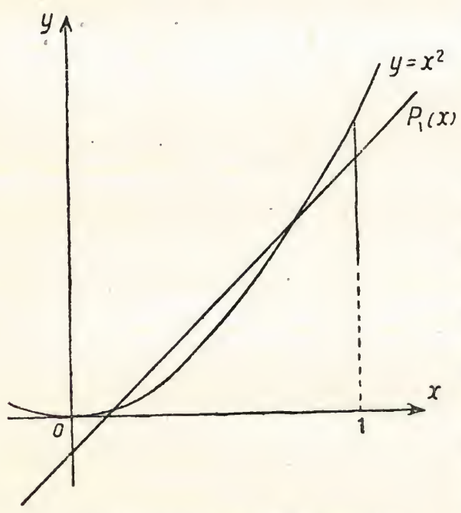
должен обратиться в минимум, и для определения постоянных a, b, c мы получим три уравнения

$$\int_0^1 [a + bx + cx^2 - e^x]\,dx = 0, \quad \int_0^1 [a + bx + cx^2 - e^x]\,x\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 [a + bx + cx^2 - e^x]\,x^2\,dx = 0,$$

откуда легко найдем $a \approx 1{,}00, b \approx 0{,}91, c \approx 0{,}78$. Но в общих случаях вычисление коэфициентов приводит к весьма сложным

формулам, не пригодным для практики. Поэтому для квадратического приближения функций чаще всего пользуются многочленами особого вида, к которым принадлежат уже известные нам многочлены Чебышева, а также многочлены Лежандра (1785 г.), Якоби (1859 г.), Лагерра (1879 г.), Эрмита и др. Квадратические приближения функций могут быть обобщены и для комплексной области. В этом направлении в новейшее время созданы новые методы, Карлеманом (1923 г.) и Сегэ (1921 г.).



Наилучшее приближение

Третий способ приближенного представления функций— это так называемое н а и л у ч ш е е п р и б л и ж е н и е, которое является обобщением упомянутого выше минимального приближения Лапласа. Пусть, например, требуется представить этим методом функцию $y = x^2$ посредством многочлена $P_1(x) = px + q$ в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$. По условию наилучшего приближения, наибольшее из абсолютных значений разностей ординат параболы и прямой, т. е. $E = \max |y - P_1(x)|$ должно быть возможно меньшим. Но это выражение E для $x = 0$ равно $E_0 = -q$, для $x = 1$ оно равно $E_1 = 1 - p - q$, а внутри интервала E имеет максимум, равный $E_m = \frac{p^2}{4} + q$. Наибольшее из этих трех чисел E_0, E_1, E_m и будет E, и оно же получит наименьшее значение, когда эти числа будут между собой равны, т. е. $-q = 1 - p - q = \frac{p^2}{4} + q$. Отсюда находим $p = 1$, $q = \frac{1}{8}$, а значит, $P_1(x) = x - \frac{1}{8}$. Однако в общем вычисление коэфициентов многочлена, дающего наилучшее приближение, представляет весьма трудную задачу и не приводит к однозначному решению. Для ряда частных случаев эта задача была разрешена Чебышевым, а затем значительно упрощена Хотимским (1925 г.).

Понятие наилучшего приближения было обобщено и для комплексной области. Особый интерес представляет наилучшее приближение аналитических и непрерывных функций. В этом отношении важные результаты достигнуты советским математиком С. Н. Бернштейном (1913, 1926, 1930 гг.) и американским математиком Джексоном (1930 г.).

Мы изложили методы приближения функций посредством степенных многочленов. Однако в естествознании и технике весьма часто встречаются п е р и о д и ч е с к и е п р о ц е с с ы, которые лучше всего можно представить приближенно т р и г о н о м е т р и ч е с к и м м н о г о ч л е н о м вида

$$T_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x \ldots + a_n \cos nx + \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x \ldots + b_n \sin nx,$$

имеющим опять-таки к о н е ч н о е число членов—г а р м о н и к. Так обстоит дело в метеорологии, где перемены температуры и другие метеорологические явления, происходящие в определенном месте, выражают как функцию времени. В учении о земном магнетизме, где изучают зависимость магнитных элементов на данной геометрической широте от географической долготы, в электротехнике, где исследуют изменение напряжения переменного тока во времени, в акустике, где колебания струн и мембран зависят от времени, в астрономии, в строительном деле, в термодинамике и т. п.—всюду применяется этот же метод.

Тригонометрический многочлен $T_n(x)$ является не чем иным, как усеченным, уже известным нам, бесконечным рядом Фурье. Впервые для интерполирования он был применен в 1754 г. Клэро, затем усовершенствован Лагранжем, Бесселем, Гауссом и другими. В связи с громадным практическим значением, которое приобрел этот метод интерполяции, называемый чаще всего г а р м о н и ч е с к и м а н а л и з о м, особенно благодаря его широкому внедрению в новейшую электротехнику, для него разработаны все детали вычислительного процесса и созданы стандартные формуляры прежде всего Рунге (1903 г.).

Приближенное представление функций тригонометрическими многочленами можно толковать или как интерполирование, или как квадратическое приближение. В зависимости от этого применяются различные методы вычисления коэфициентов, порождающие различные проблемы.

Так, например, если периодическая функция, которую требуется представить квадратическим приближением, имеет для $x = x_0$ р а з р ы в равный $\overline{AB}$, то здесь будет иметь место так называемое явление Гиббса, объясненное им в 1899 г. (см. черт. на стр. 105). Смысл его в том, что тригонометрические многочлены $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$,..., $T_n(x)$ будут при возрастающем n иметь своим пределом непрерывную кривую, которая для $x = x_0$ имеет наивысшую точку C и наинизшую точку D, причем превышение $\overline{AC} = \overline{BD}$ всегда равно примерно 9% $\overline{AB}$. Как показал Фейер (1904 г.), явление Гиббса может быть устранено, если

вместо последовательного приближения многочленами T_0, T_1, $T_2, \ldots, T_n$ мы будем изображать данную функцию их средними арифметическими

$$S_0 = T_0,\ S_1 = \frac{1}{2}(T_0 + T_1),\ S_2 = \frac{1}{3}(T_0 + T_1 + T_2), \ldots$$

Кроме непериодических процессов, аппроксимируемых степенными многочленами $P_n(x)$, и периодических процессов, приближенно изображаемых тригонометрическими многочленами $T_n(x)$, в природе встречаются почти-периодические процессы, вызываемые рядом различных причин, из которых лишь часть действует периодически. Их изучают особенно в астрономии, метеорологии и акустике. Основная задача состоит здесь как раз в отыскании их скрытой непериодичности. Так, например, образование пятен на поверхности Солнца является почти-периодическим процессом. Моменты максимального затемнения повторяются в среднем через одиннадцать с лишним лет. Величина затемненной поверхности будет выражаться как функция времени t в виде

$$y = \varphi(t) + a_1 \cos(n_1 t + \varepsilon_1) + a_2 \cos(n_2 t + \varepsilon_2) \ldots + a_m \cos(n_m t + \varepsilon_m).$$

Здесь $\varphi(t)$ является какой-то непериодической функцией, остальные же члены представляют гармоники. Задача состоит в том, чтобы по данным наблюдениям (дающим большое количество пар t, y) установить сначала периоды $\frac{2\pi}{n_1}, \frac{2\pi}{n_2}, \ldots, \frac{2\pi}{n_m}$, а затем и амплитуды $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и фазы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ отдельных гармоник. Первый метод для определения скрытых периодичностей был предложен Лагранжем в 1722 г. С тех пор был создан ряд новых методов, основанных на различных принципах, из которых наиболее распространен метод Шустера (1906 г.), построенный на вероятностных соображениях.

Исключительно важной областью практической математики является приближенное решение дифференциальных уравнений. Если дано какое-либо дифференциальное уравнение (например, уравнение $\frac{dy}{dx} = x + ye^{-y}$ с начальными условиями $x = 0,\ y = 0$), которое не решается в законченном виде, то, как нам уже известно, задача состоит в нахождении его численного решения. Это значит, что требуется составить с заданной степенью точности (например, до четырех десятичных знаков) и в заданном интервале (например, от $x = 0$ до $x = 0{,}5$) таблицу значений x, y. В данном примере она будет иметь вид:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	0	0,0052	0,0214	0,0497	0,0913	0,1421.

В приведенном примере—а такие встречаются весьма часто в практических задачах—мы были вынуждены прибегнуть к численному решению потому, что не умеем привести заданное уравнение к квадратурам. Возможно, это еще удастся в отдельных случаях, когда будет открыт какой-либо новый прием, однако там, где в диференциальное уравнение входят функции, которые не заданы аналитической формулой, как, например, в уравнениях баллистики, численное решение останется единственным методом. Так, чтобы вычислить траекторию полета снаряда, необходимо найти решение системы уравнений, в которых встречаются эмпирически установленные зависимости между сопротивлением воздуха и скоростью полета, а также между относительной плотностью воздуха и высотой снаряда над уровнем точки вылета. Эти зависимости задаются таблицами, и поэтому понятно, что диференциальные уравнения баллистики могут быть интегрируемы только численно. Но и тогда, когда диференциальное уравнение можно привести к квадратурам, зачастую рекомендуется решать его численно, так как, все равно, интегрирование не всегда может быть осуществлено конечным количеством элементарных функций. Так, например, уравнение $\frac{dy}{dx} = y + \frac{1}{x}$ имеет своим решением $y = ce^x + e^x \int \frac{dx}{xe^x}$, но встречающийся здесь интеграл можно выразить для $0 < x < \infty$ лишь бесконечным рядом, а именно $\int \frac{dx}{xe^x} = \ln x - \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \ldots$ В данном случае этот ряд носит особое название интегрального логарифма и обозначается $\mathrm{Li}x$. Его значения составлены в особые таблицы, и поэтому мы можем обращаться с ним так же легко, как с элементарными функциями. Но, как правило, для всех крайне разнообразных интегралов, встречающихся в уравнениях, таблицы, понятно, не составлены. Поэтому незачем формально выводить эти интегралы, лучше употребить сразу приближенный метод решения.

Численное решение диференциальных уравнений впервые было разработано Эйлером (1768 г.). Пусть в наиболее простом случае дано диференциальное уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ с начальными условиями $x = x_0,\ y = y_0$. Идея Эйлера состоит в том, что если выбрать достаточно малый промежуток h, то, пока x будет заключаться между x_0 и $x_0 + h$, можно считать производную постоянной и равной $y'_0 = f(x_0, y_0)$. Поэтому здесь $y = y_0 + (x - x_0)\, y'_0$, а, значит, для $x_1 = x_0 + h$ получим $y_1 = y_0 + hy'_0$. Повторяя этот же прием, мы вычислим сначала y'_1, потом для $x_2 = x_1 + h$ значение $y_2 = y_1 + hy'_1$ и т. д. до x_n, y_n.

Для «неудобных случаев», когда $y_0' = 0$ или когда $y_0' = \infty$, Эйлер указал также, как следует видоизменить этот прием. Для небольшого интервала $x_n - x_0$ этот метод дает сравнительно малые погрешности, при условии, что y' не возрастает слишком быстро.

Метод Эйлера был в дальнейшем развит Коши, а затем Пикаром. В новейшее время были предложены другие приемы, избегающие трудностей прежнего метода и требующие меньше вычислительной работы. Один из них предложен в 1895 г. Рунге и усовершенствован Кутта (1901 г.), но и он довольно громоздок. Другой был разработан Штермером в результате предпринятого им на протяжении ряда лет (1890—1920) вычисления сложных траекторий электронов, входящих в состав северного сияния. Эти вычисления представляют обработку данных многочисленных наблюдений, собранных в полярных экспедициях. Метод Штермера, обладая той же точностью, как и метод Рунге, требует значительно более простых вычислений. Наиболее простой и совершенный метод был применен в 1883 г. знаменитым астрономом Адамсом совместно с Башфортом, а затем значительно усовершенствован советским математиком А. Н. Крыловым (1917 г.). Он основан на теоремах исчисления конечных разностей. Метод А. Н. Крылова был распространен им и на дифференциальные уравнения высших порядков, на системы дифференциальных уравнений и т. д. Другим советским математиком Чаплыгиным (1930 г.) был открыт новый метод приближенного интегрирования уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ для случая, когда функция f непрерывная и имеет только один интеграл для любого начального значения $x = x_0$, $y = y_0$. Два дифференциальных уравнения

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x)\, z + \psi(x), \quad \frac{dt}{dx} = \rho(x)\, z + \sigma(x)$$

(которые являются линейными и поэтому могут быть легко интегрированы) подбирают так, чтобы $\frac{dz}{dx} > \frac{dy}{dx} > \frac{dt}{dx}$, а затем переходят к следующим парам уравнений, которые сжимают искомую функцию все тесней и тесней.

Совершенно особо необходимо выделить операторные методы, разработанные Н. М. Крыловым и Боголюбовым (1926 г. и позже), дающие возможность приближенного интегрирования уравнений нелинейной механики. Если прежде математики главным образом интересовались линейными дифференциальными уравнениями, то теперь, в особенности

в связи с развитием радиотехники, им приходится изучать колебания, приводящие уже в простейшем случае, к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Нечто аналогичное имеет место и при исследовании сложных явлений: резонанса в анодных осциляторах, возмущений орбит планет, вибраций самолета, колебаний сооружений и т. п.

Скажем несколько слов о приближенном решении интегральных уравнений. Эти уравнения могли бы получить большое значение в технических науках и в физике, однако благодаря своей сравнительной молодости теория их дает еще мало результатов, пригодных для практики. О значимости, которую они получат в будущем, говорят многочисленные примеры. Так, в 1911 г. Нотт нашел путем численного решения интегрального уравнения, составленного на основании данных наблюдений над землетрясениями, форму сейсмических лучей внутри земли. Числовые решения интегральных уравнений созданы Прейседом (1924 г.), для уравнений типа Вольтерра, в то время как для уравнений типа Фредгольма, особенно первого рода, они разработаны значительно слабее. Кроме трудов Э. Шмидта, Уиттекера (1918 г.), Бейтмана (1921 г.) необходимо указать на труды Н. М. Крылова (1929 г.), применившего метод наименьших квадратов, а также работу Орлова (1931 г.), заменившего интеграл, входящий в заданное интегральное уравнение, интерполяционной формулой.

Как бы сложна ни была математическая задача, ее решение, если только оно должно иметь практическое значение для техники и естествознания, будет в конце концов выражаться в какой-либо алгебраической формуле. В нее необходимо подставить числовые значения—известные результаты измерений—вместо буквенных символов.

Пусть требуется определить прогиб h верхнего конца вертикальных деревянных столбов, из которых состоит плотина высоты $l = 2м$, если известно, что расстояние между осями двух смежных столбов, закрепленных в нижних концах, равно $c = 1м$, модуль упругости для дерева $E = 10^5\ кг/см^2$, момент инерции поперечного сечения столба относительно нейтральной оси $I = 9000\ см^4$. Для решения этой задачи нам придется сначала составить, а потом интегрировать дифференциальное уравнение второго порядка, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c}{6EI}(l-x)^3$, но в итоге, после всех промежуточных выкладок, мы придем к простой формуле $h = \frac{cl^5}{30EI}$, а после подстановки наших данных получим из нее

$h \approx 1{,}3$ *см*. Практическая математика должна максимально облегчить и упростить не только процесс вывода окончательной формулы, но и вторую часть работы—самую практику численного счета.

Практика численного счета требует точности и скорости. Однако эти требования трудно совместимы, а доведенные до крайности они исключают друг друга. Но мы уже указывали, что распространенный взгляд на господствующую, якобы, в математике «абсолютную точность» является заблуждением и что само понятие «математической точности» имеет на деле другой смысл, чем тот, который ему обыкновенно приписывают люди, не понимающие существа математического метода. Поэтому вполне понятно, что практика вычислений имеет дело лишь с заранее заданной точностью, или, что то же самое, с заранее заданным допуском погрешностей. Эта точность зависит от точности измерений, определивших данные, входящие в нашу задачу. Было бы нелепо, если бы в приведенном только что примере мы стали вычислять $h = 1{,}259$ *см*, до сотых долей миллиметра, в то время как основные постоянные даны нам в метрах, с точностью до 1 *см*. Значит, всякое вычисление должно вестись лишь с необходимой точностью; излишние десятичные знаки будут только ненужной и вредной обузой. Но так как в процессе вычисления происходит накопление погрешностей, то мы не можем после каждой отдельной арифметической операции механически отбрасывать излишние знаки. Поэтому разработана теория погрешностей арифметических действий над числами, заданными с известным приближением. Благодаря ей мы имеем возможность оценивать точность получаемых результатов. Так, если дано число 134,25, найденное с погрешностью 0,01, то это значит, что истинное значение этой величины находится между 134,24 и 134,26. Это записывают так: $134{,}25 \pm 0{,}01$. Если теперь требуется сложить числа

$$\begin{array}{r} 134{,}25 \pm 0{,}01 \\ 13{,}281 \pm 0{,}001 \\ 12{,}3 \pm 0{,}1 \\ \hline \end{array}$$

то теория доказывает, что погрешность суммы будет равна сумме погрешностей слагаемых, т. е. 0,111. Отсюда следует, что, вместо того чтобы считать результатом сумму 159,831, мы должны удовлетвориться ее округлением в 159,8. Немногим более сложны правила для приближенного вычитания, умножения и т. д.

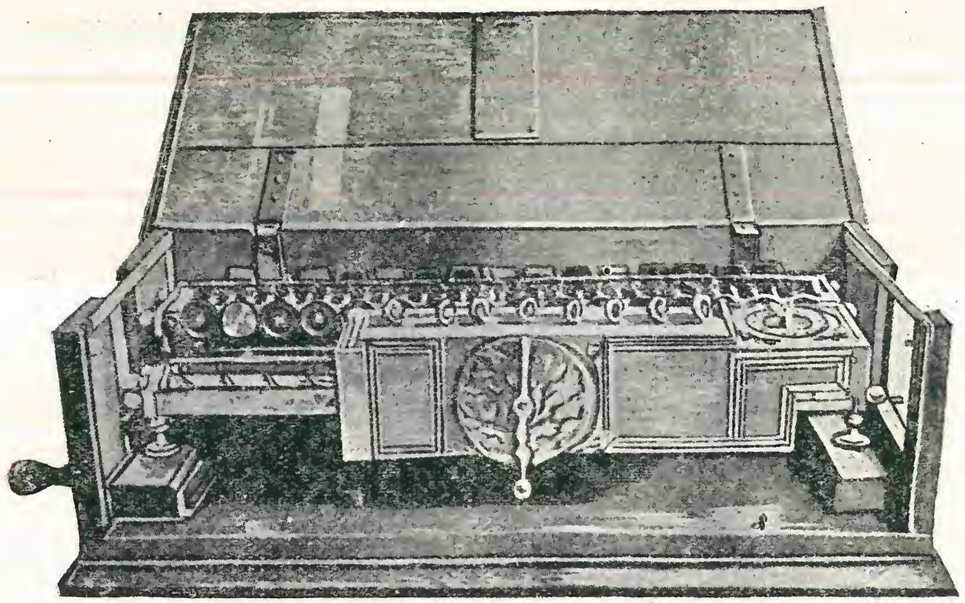
Что касается скорости вычислений, то она зависит от техники счета. Для устного счета разработаны

различные приемы, значительно ускоряющие его. Используя подобные приемы, основанные на свойствах чисел, артисты-вычислители, как, например, Ферроль, Рюкле и др., немедленно находят корни 3-й, 5-й, 7-й и других степеней из двадцати-тридцатизначных чисел, молниеносно пишут произведение двух многозначных множителей и т. п. Конечно, важную роль играет иногда незаурядная память этих людей, знающих наизусть квадратные и кубические степени трехзначных чисел, и т. п. Памятью пользуется всякий, кто употребляет таблицу умножения, состоящую всего из 36 чисел:

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3		9	12	15	18	21	24	27
4			16	20	24	28	32	36
5				25	30	35	40	45
6					36	42	48	54
7						49	56	63
8							64	72
9								81

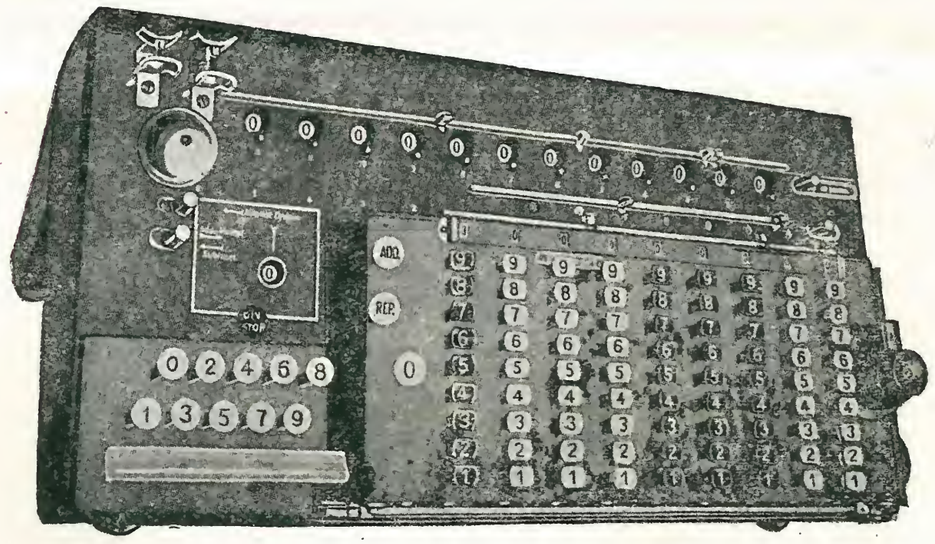
Понятно, что значительно быстрее вычисляет заучивший добавочно и «большую таблицу умножения», состоящую из 648 чисел, т. е. из произведений от 2×11 до 9×99.

Следующий этап состоит естественно в замене памяти таблицами. Наиболее распространенными являются таблицы произведений, например произведений всех трехзначных чисел на все трехзначные и т. п. Разумеется, что такие таблицы, содержащие большое количество чисел (в указанном примере 1 000 000 чисел), не могут печататься в форме квадрата, наподобие той, которую мы только что привели. Применяются особые, иногда весьма остроумные, приемы, чтобы сделать таблицы по возможности компактными и легко обозримыми. Имеется целая отрасль табулирования, изучающая проблемы создания наиболее удобных таблиц. Кроме таблиц произведений создано множество других таблиц. Сюда относятся таблицы квадратов, кубов, квадратных и кубических корней, таблицы логарифмов, гауссовых логарифмов сумм, длин окружностей и площадей кругов, тригонометрических функций и их логарифмов. Применяются также таблицы специальных функций, например гиперболических, эллиптических, гамма-функций и т. п., таблицы выражений, часто встречающихся в отдельных отраслях математики или ее приложениях, например процентов, сложных процентов, делителей, факториалов, простых чисел и т. д. и т. п.



Счетная машина Лейбница

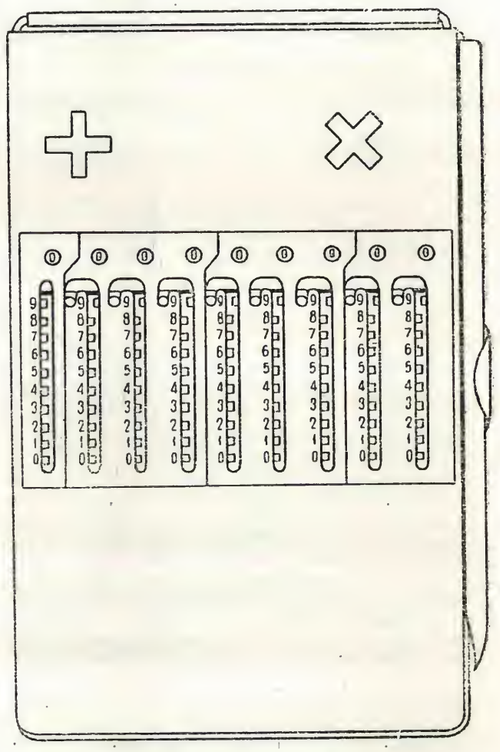
Хотя вычисление посредством таблиц дает значительные облегчения, оно, благодаря однообразию работы и самых таблиц, при продолжительном пользовании ими нередко вызывает утомление зрения и понижение внимания, что влечет за собой неизбежные ошибки. Внешний вид таблиц, особый подбор шрифта для цифр, чтобы они по возможности сильно



Современный арифмометр

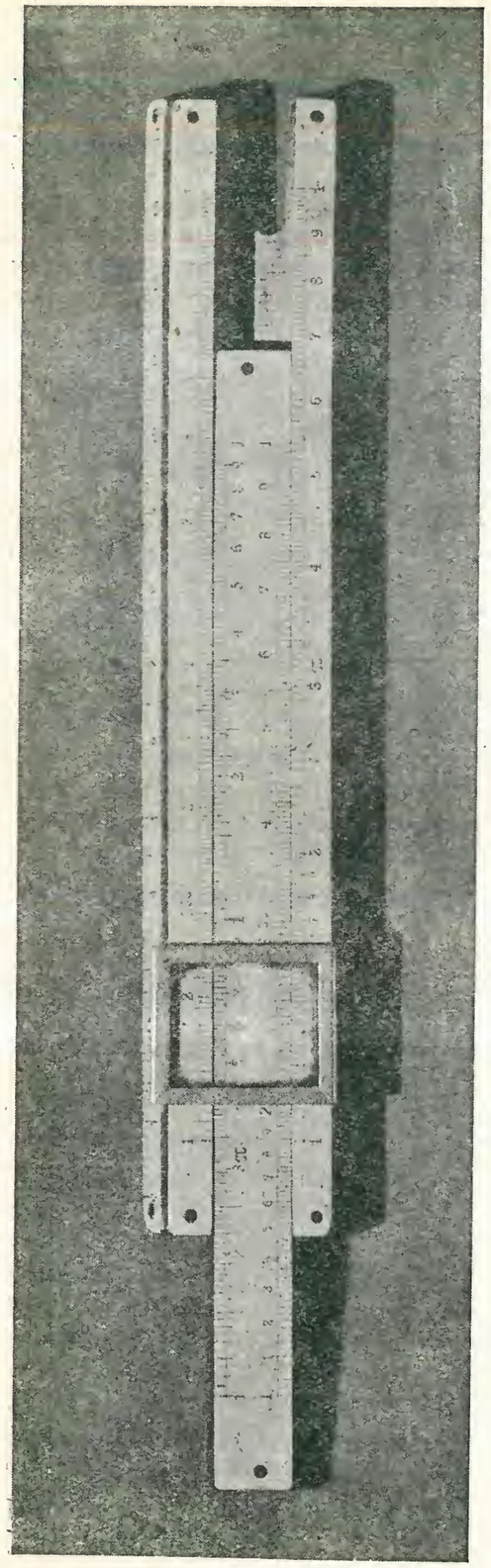
различались между собой, лишь ослабляют это вредное действие, но неспособны устранить его полностью.

Несравненно лучше в этом отношении обстоит дело при пользовании счетными машинами. Простейшим счетным прибором наряду с древней греческо-римской счетной доской абаком являются распространенные у нас (а также в несколько отличной форме в Китае) счеты, особенно пригодные для сложения и вычитания. Прямая и круговая счетные линейки были изобретены еще в 1630 г. Отредом. Первая счетная машина была построена Паскалем (1642 г.), другая Лейбницем (1671 г.), но лишь механикам конца XVIII в. удалось создать действительно бесперебойно работающие машины новой конструкции, послужившие прообразом современных арифмометров. И только с конца прошлого века было организовано массовое производство недорогих высококачественных арифмометров, получивших широкое распространение в счетных, банковских, технических учреждениях.



Карманный арифмометр

Многочисленные типы существующих арифмометров являются в большинстве случаев видоизменениями и усовершенствованиями конструкции шведского инженера Однера. Она построена на том, что поворотом ручки (производимым рукой или электромотором) приводится в движение барабан со спицами, который движет колесики, имеющие по 10 зубцов. Один поворот ручки поворачивает каждое колесико на столько единиц, сколько спиц мы предварительно выдвинули. При этом имеется простое устройство для переноса единиц в десятки (например, при сложении $9 + 2 = 11$). Таким образом, теоретический принцип арифмометра состоит в осуществлении формальных правил обыкновенного счета механическим путем. В крайне упрощенном виде созданы и карманные арифмометры, особенно пригодные для сложения и вычитания, в которых зубчатые колесики заменены зубчатыми стерженьками. Благодаря исключи-

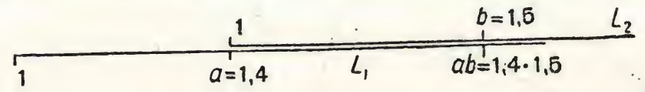


Логарифмическая линейка

тельной легкости овладения их нехитрой техникой, организация массового производства карманных счетчиков и внедрение их в обиход, начиная со школы, съэкономили бы огромное количество труда, например, при различных счетных операциях в колхозах и т. п.

В то время как арифмометр служит для точных вычислений, логарифмическая линейка является наиболее распространенным прибором для приближенного вычисления. Она дает возможность находить результаты умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня, логарифмы и тригонометрические функции с точностью до трех знаков, вполне достаточной для многих технических вычислений. Принцип построения линейки чрезвычайно прост и основывается на том, что логарифм произведения двух чисел равен сумме их логарифмов $\log ab = \log a + \log b$. Построим логарифмическую шкалу L_1, т. е. такую шкалу, на которой расстояния делений от ее начала будут равны логарифмам чисел 1, 2, 3..., но пометим эти деления не логарифмами, а самими числами. Если мы сдвинем вторую, тождественную с ней, логарифмическую шкалу L_2 так, чтобы ее начало совпало

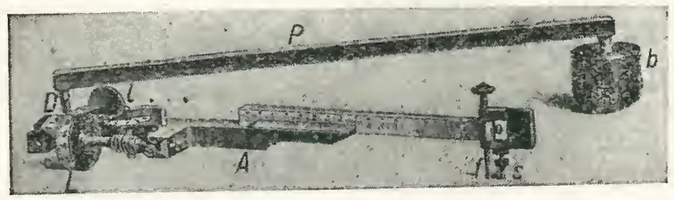
с делением первой шкалы, помеченным числом a, то против деления второй шкалы, помеченного числом b, мы прочтем на первой шкале число, равное произведению ab. Для специальных вычислений, встречающихся, например, в геодезии, в электротехнике и т. п., имеются наряду с обыкновенными универсальными линейками специальные счетные линейки. Кроме прямой линейки в употреблении находятся также логарифмические счетчики, шкалы которых расположены по окружности или нанесены по винтовой линии на поверхности цилиндра.



Принцип логарифмической линейки

Наряду с приведенными простыми счетными приборами и машинами применяются и значительно более сложные как по своей идее, так и по конструкции. Сюда относятся: планиметр, интеграф, гармонический анализатор и др.

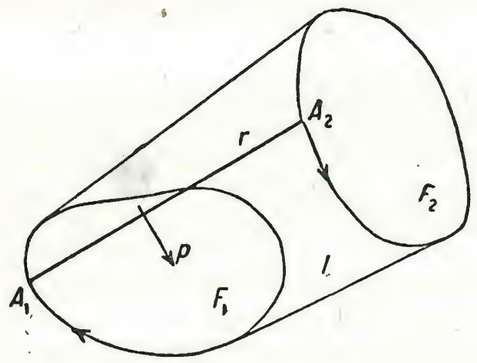
В 1854 г. Амслером был построен полярный планиметр, который дает возможность находить площадь любой



Полярный планиметр

вычерченной плоской кривой, т. е. находить значение определенного интеграла. Идея этого прибора состоит в том, что если двигать отрезок $\overline{A_1A_2} = r$ по плоскости так, чтобы его конечные точки описывали две замкнутые кривые, то площадь J, описанная всем отрезком l, равна $J = F_2 - F_1$, где F_1, F_2—площади, содержащиеся внутри обеих замкнутых кривых, к тому же учитывается и смысл обхода каждой площади. Но так как эта же площадь J может быть вычислена как произведение $J = rp$, где p—путь, пройденный отрезком $\overline{A_1A_2}$ в направлении, перпендикулярном к отрезку, то, придав F_2 известную нам величину и измерив p, мы получим и неизвестное F_1. В приборе F_2 избрано равным нулю, а длину p отсчитывает небольшой ролик, катящийся по бумаге, когда конец A_1 стержня $\overline{A_1A_2}$ описывает контур искомой площади.

В отличие от планиметра, дающего лишь значение определенного интеграла, и н т е г р а ф вычерчивает всю интегральную кривую $y = F(x) = \int f(x)\,dx + C$, если вычерчена кривая $y = f(x)$. Идея этого инструмента, сконструированного Абданк-Абакановичем, также исключительно проста. Она воспроизводит простейшим механическим движением основное свойство интеграла, состоящее в том, что $f(x) = F'(x)$ выражает наклон касательной кривой $y = f(x)$. Интеграфы могут быть использованы и для приближенного решения дифференциальных уравнений вида $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, для вычисления центров тяжести, моментов инерции и т. п.



Принцип планиметра

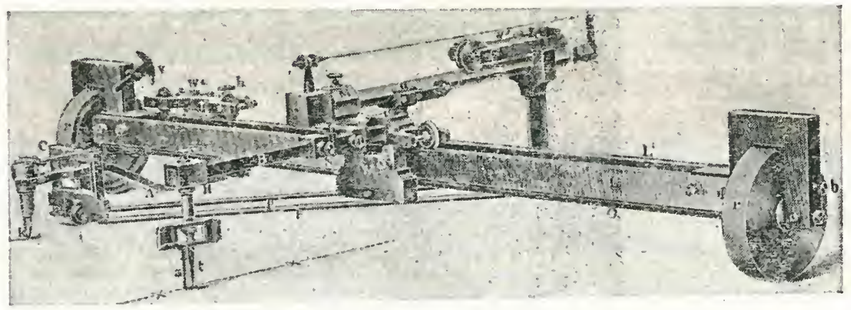
Г а р м о н и ч е с к и й а н а л и з а т о р — прибор, служащий для механического вычисления коэфициентов тригонометрического многочлена

$$T_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx + \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx,$$

который должен приближенно представить заданную периодическую функцию $y = f(x)$. Этот прибор, построенный по идее Хенриси, имеет своей важнейшей составной частью шарик, катящийся по чертежу в направлении dy. Шарик соприкасается с двумя роликами так, чтобы они, вращаясь, отсчитывали значения интегралов $\int_0^{2\pi} \cos nx\,dy$, $\int_0^{2\pi} \sin nx\,dy$, пропорциональных коэфициентам a_n, b_n.

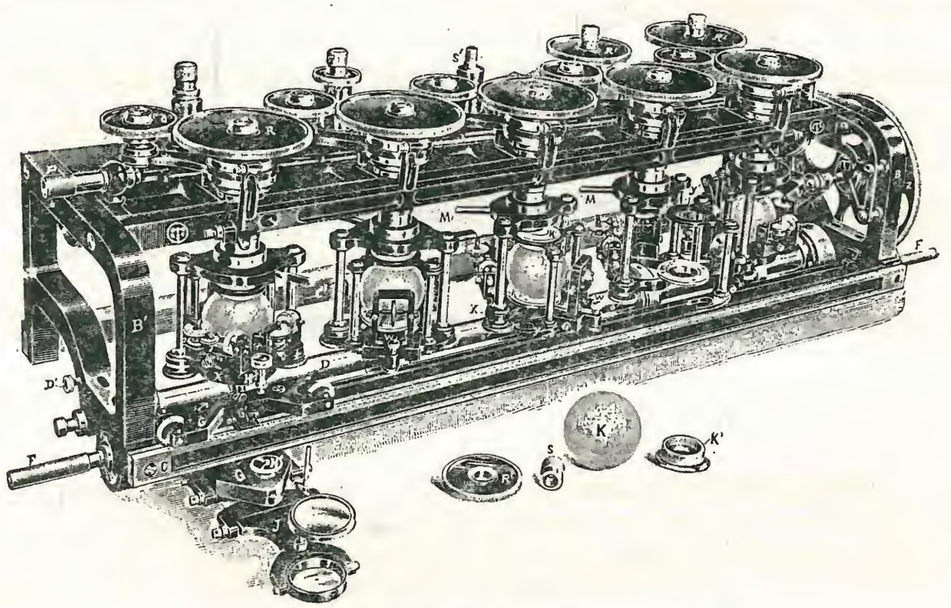
Путем дальнейшего развития принципов, лежащих в основе планиметра, интеграфа, гармонического анализатора, построены специальные приборы для механического определения величин, которые в какой-либо отрасли техники или естествознания приходится отыскивать в массовом масштабе. Так, например, в фотометрии для определения среднего значения радиуса r полярной диаграммы, равного $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\,d\varphi$, построен специальный планиметр.

Комбинированием этих же принципов созданы чрезвычайно сложные вычислительные машины—д и ф е р е н ц и а л ь н ы е а н а л и з а т о р ы, дающие возможность интегрировать дифе-



Интеграф

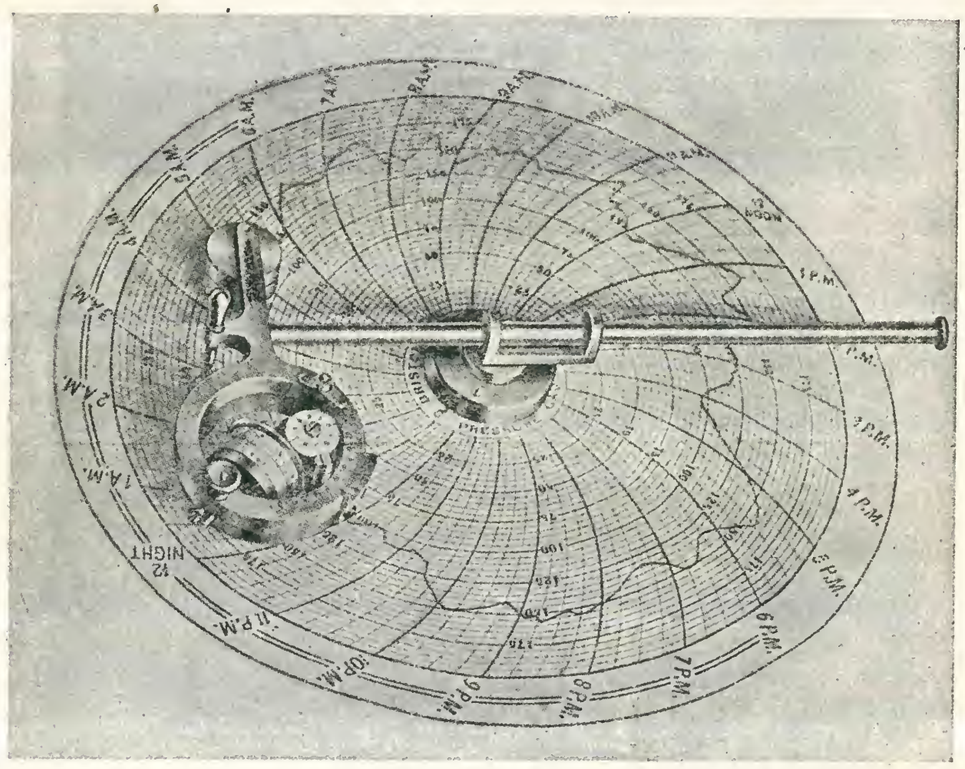
ренциальные уравнения высших порядков, системы дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения и т. д. Такого рода



Гармонический анализатор

вычислительная машина большого совершенства, построенная Бушем, имеется в Массачузетском технологическом институте, в Кембридже, в США, а совсем недавно (1935 г.) гигантский дифференциальный анализатор, имеющий в своем составе восемь интеграторов, построенный под руководством Хартри, начал работать в Манчестерском университете.

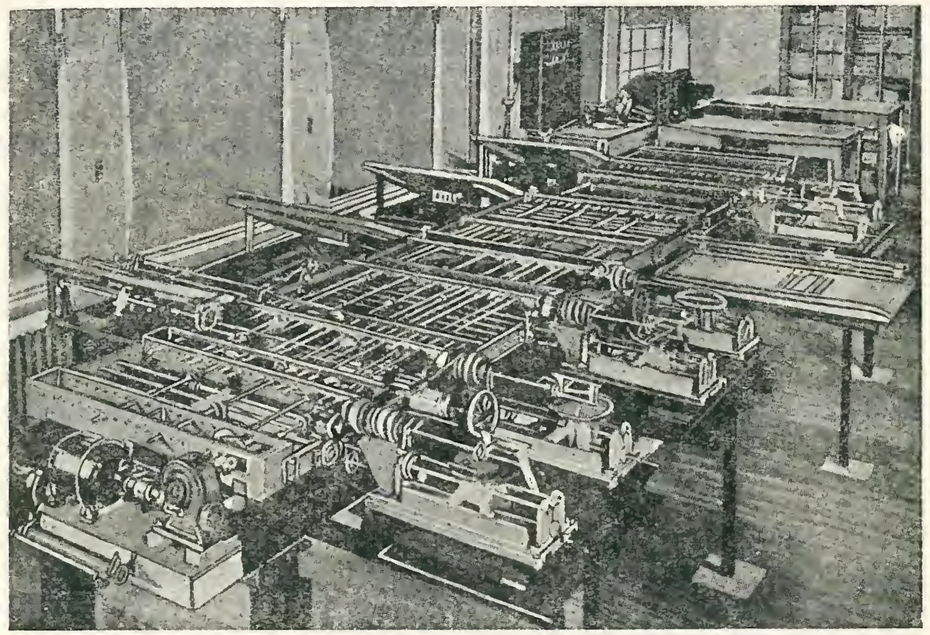
Счетные приборы и счетные машины ставят на службу математике простейшие свойства некоторых механизмов. Так, например, в счетной линейке мы используем основное свойство всякого жесткого тела: не изменять своей формы и размеров при переносе из одного места пространства в другое. Если с первого взгляда и кажется поразительным, что мертвый механизм в состоянии заменить живой мозг математика, то после небольшого



Планиметр для полярных диаграмм

размышления мы должны признать, что ничего «чудесного» в этом обстоятельстве нет. Во-первых, нельзя собственно говорить о «замене», так как сам механизм построен математиком и выполняет лишь его идеи, значит, точнее следует говорить о его «продолжении». Во-вторых, математика не является свободным творением человеческого ума, а отражает лишь определенные закономерности действительного материального мира. Поэтому одинаково естественно и то, что другие , нематематические, закономерности этого материального мира могут быть использованы математикой, и то, что сами математические закономерности находят применение при исследовании нематематических закономерностей. Лишь математик-идеалист,

математик-махист, видящие разрыв между «чистой» и «прикладной» математикой, нуждаются в каких-то особых ухищрениях для объяснения этого «сверхъестественного» явления. Из этого же идеалистического источника вполне последовательно вытекает и то явно реакционное пренебрежение, которое многие «чистые» математики выказывают к вычислительным приборам. Нелепость и непоследовательность этого консервативного поведе-



Диференциальный анализатор

ния бросаются в глаза—ведь против линейки и циркуля даже самый «чистый» математик не возражает, а между тем они являются механизмами, так же как и интеграф или анализатор.

На деле разница между теоретической и практической математикой состоит лишь в том, что в теоретической математике допускаются бесконечные процессы, а поэтому всякая величина может быть определена, рассуждая абстрактно, до любого десятичного знака, в то время как в практической математике мы встречаемся всегда с заданной, ограниченной точностью. Но безграничная «точность» теоретической математики является в свою очередь только недостижимой абстракцией. Эта безграничность благодаря невозможности бесконечно продолжать вычислительный процесс обеспечивается не на деле, не эффективно, а постулируется всей системой математических аксиом.

Следует, однако, иметь в виду одно важное различие между понятием границы точности в математике и тем же понятием

в физике и в других естественных науках. В математике необходимость ограничиться конечным количеством знаков, например, десятью десятичными знаками, не означает, что у нас нет возможности определить и следующие—одиннадцатый, двенадцатый и т. д.—знаки, а указывает, что мы сами отказываемся от их вычисления, поскольку, с одной стороны, мы все равно никогда не будем в состоянии определить все знаки, с другой стороны, мы приходим к выводу, что десяти знаков для данной задачи достаточно. В физических измерениях дело обстоит иначе. Там мы на сегодняшний день вынуждены отказаться от дальнейшего увеличения достигнутой точности, так как не обладаем, при данной ступени исторического развития науки, более усовершенствованными измерительными приборами и методами.

Исходя из всех этих соображений, мы решаем, в какую сторону можно расширить применение физических методов в математике, и в то же время, какие им положены границы, с какой предосторожностью необходимо этими методами пользоваться. Возникает вопрос, почему на службу математике поставлены лишь те механические, точнее, кинематические закономерности, которые используются в описанных нами счетных приборах и машинах, почему нельзя применить для этой же цели и закономерности динамики твердых тел, жидкостей и газов, явлений оптических, электромагнитных, химических и т. д.? Ограничивать нас могут здесь не принципиальные, а чисто практические соображения. Они вытекают из того, что чем сложнее те или другие явления, тем труднее и недоступнее становится выделение их закономерностей.

Но, применяя в математике любой физический метод, надо помнить, что само выражение физических закономерностей—даже простейших кинематических—является только известным приближением к действительности и, кроме того, что использование этих закономерностей, связанное неизбежно с производством измерений, влечет за собой погрешности, граница которых для данного состояния науки не может быть понижена.

Еще Архимед применял для определения величины площадей взвешивание. Вырезав из возможно однородного материала, например из жести, фигуру, ограниченную кривой данной формы, и взвесив ее на точных весах, мы можем, таким образом, установить приближенное значение определенного интеграла. Степень точности зависит, во-первых, от предполагаемой однородности, следовательно, от нашего знания структурных свойств материи, во-вторых, от точности вырезки контура и, в-третьих, от точности взвешивания. Законы тяжести мы могли бы использовать еще и для других целей: например, для вычисления

значений эллиптического интеграла, входящего в формулу времени качания математического маятника. Разными изобретателями, например Месленом (1900 г.), неоднократно предлагались гидростатические и гидродинамические приборы, в виде сообщающихся сосудов различной формы или сосудов с истекающей из них жидкостью, для приближенного решения алгебраических уравнений n-й степени, трансцендентных уравнений, системы линейных уравнений. Клейн доказал существование потенциальных функций на проводящих поверхностях физическим путем, отметив, что электромагнитный метод может помочь изучить различные свойства потенциальных функций. То обстоятельство, например, что коэфициент самоиндукции L катушки выражается сложным двойным интегралом, можно использовать для приближенного вычисления двойных интегралов, употребив для этого, скажем, мост Уитстона. Люка (1890 г.) описал электромагнитный метод нахождения всех корней, в том числе и комплексных, уравнения n-й степени, причем корни—нейтральные точки электромагнитного поля—находятся по силовым линиям, вычерчиваемым железными опилками.

Физические методы могут быть использованы не только для нумерических вычислений интегралов, диференциальных уравнений и т. п., но и для решений более сложных и общих задач. Особенно это относится к качественным проблемам математики, когда требуется, например, определить, будет ли данное диференциальное уравнение иметь своим решением замкнутую линию. Если удастся поставить физический эксперимент, соответствующий данной математической проблеме, то по его результату можно вывести важные заключения, указывающие, в каком направлении и каким путем следует добиваться ее решения. Конечно, чаще всего та математическая проблема, которая должна быть решена, как раз и служит для исследования определенного физического процесса, и поэтому отсылка к физическому эксперименту может показаться нам вращением в заколдованном кругу. Однако «вся кий вопрос «вертится в заколдованном кругу», ибо вся политическая жизнь есть бесконечная цепь из бесконечного ряда звеньев. Все искусство политика в том и состоит, чтобы найти и крепко-крепко уцепиться за такое именно звенышко, которое всего меньше может быть выбито из рук, которое всего важнее в данный момент, которое всего более гарантирует обладателю звенышка обладание всей цепью»[1]. Эта гениальная мысль Ленина, высказанная им применительно к деятельности политика, одинаково относится и к научному

[1] Ленин, Собр. соч., т. IV, стр. 487.

исследованию, в частности и к математическому. Встречающимися в математике «заколдованными кругами» овладевают тогда, когда удается схватить основное звено цепи. Так обстоит дело и в данном случае. Известно, что физические процессы, различные по существу, могут быть связаны в количественном отношении с формально тождественными им математическими проблемами. Поэтому, если, например, электромагнитный процесс E_1 приводит к диференциальному уравнению D, то для решения этого уравнения, построив соответствующую поверхность F, мы можем простым механическим экспериментом E_2—наложением на нее гибкой полоски—найти ее геодезические линии, разрешающие и задачу, поставленную процессом E_1. На основании экспериментов с упругими механизмами можно было бы сделать важные заключения о свойствах собственных значений и собственных функций диференциальных и интегральных уравнений, соответствующих как этим упругим механизмам, так и некоторым аналогичным им электромагнитным процессам.

Разумеется, что применение физических методов связано с созданием необходимых экспериментальных установок и с изучением всех факторов, которые при данной конструкции влияют на результат измерения. К сожалению, до сих пор нет еще достаточной систематизации имеющихся начинаний в области физических методов, а также отсутствуют попытки построения какой-либо единой теории. Даже в фундаментальных трудах по практической математике Рунге или Виллерса эта область почти игнорируется, и лишь небольшая работа советского математика Бурстина (1932 г.) содержит весьма ценные соображения на этот счет.

Сейчас нам следует остановиться на ряде вопросов практической геометрии. Мы оставляем в стороне геодезию, так как относящаяся сюда основная проблема геодезии—выравнивание результатов измерения методом наименьших квадратов—отчасти нами уже показана, а обоснование этого метода будет дано в связи с теорией вероятностей. Приступим поэтому сразу к конструктивной геометрии, орудием которой является чертеж (или модель); она ставит себе целью или наглядное изображение пространственных отношений, или графическое вычисление, т. е. замену вычислений построением. И в том и в другом случаях ставится вопрос об оценке погрешностей, возникающих при геометрических построениях. Этим вопросом занимается геометрография, основанная Лемуаном и развитая рядом современных математиков, в том числе Нитцем (1905 г.), Валеном (1911 г.) и др.

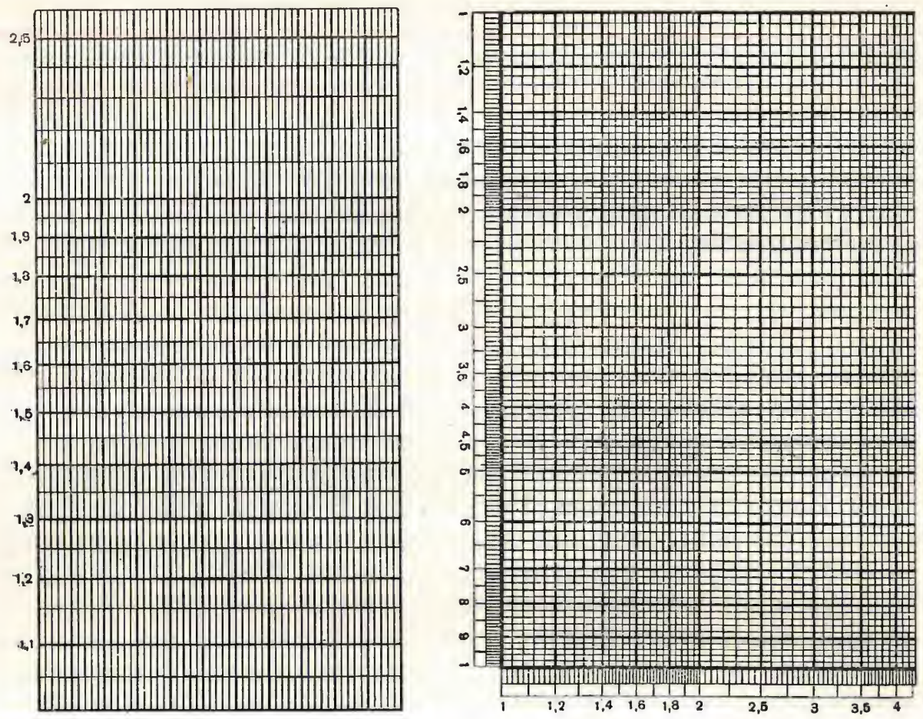
Всякая геометрическая конструкция, которая может быть осуществлена с помощью линейки и циркуля, является комбинацией пяти элементарных операций, связанных с помещением острия циркуля в точку пересечения двух прямых, прямой и окружности или двух окружностей, соединением двух точеки прямой посредством линейки и построением окружности с заданными центром и радиусом. Применяя к этим операциям или к их результатам тот или другой метод выравнивания, различные авторы создают соответствующие методы оценок погрешностей геометрических конструкций. Из них наиболее грубый метод Лемуана оценивает точность геометрического построения как обратно пропорциональную количеству произведенных элементарных операций, наиболее точный—Бемера (1904 г.)—исходит из метода наилучшего приближения, употребляя полиномы Чебышева.

Графические методы для решения алгебраических задач применялись по существу уже в V в. до начала нашего летоисчисления в Афинах. Например, для того чтобы осуществить точное деление любого угла на три равные части—так называемую «трисекцию угла»,—не выполнимую линейкой и циркулем (что было доказано лишь в XIX в.), была применена трансцендентная кривая—квадратрикса, изобретенная будто бы современником Сократа софистом Гиппиасом. В явном виде графические методы для решения алгебраических и трансцендентных уравнений широко применялись в эпоху Ферма́ и Декарта. Согласно этим методам, а также и всем позднейшим, представляющим их значительное усовершенствование, по данному уравнению, на основании нескольких вычисленных точек, вычерчивается плавная кривая и приближенно находятся ее пересечения с осью x. На деле это сводится к покусочной замене кривой хордами или касательными. Этот способ уже известен нам в форме численного решения.

В новейшее время, после работ Лаланда (1843 г.), для облегчения графических вычислений стали изготовлять фабричным путем разграфленную бумагу, которая покрыта равномерной квадратной сеткой (со стороной, равной 1 или 0,5 *мм*), а также бумагу с другими принципами деления. Наиболее распространена логарифмическая бумага, где деление по оси x идет равномерно, а по оси y—логарифмически, или такая, где деления по обеим осям произведены логарифмически. Если на этой бумаге начертить зависимость $y=ax^n$, то, так как $\log y = \log a + n \log x$, она будет изображаться в виде прямой. Графическое решение алгебраических уравнений получает таким образом значительные облегчения.

Однако сетка с логарифмической или другой функциональной шкалой является лишь промежуточным звеном к новому методу, принадлежащему целиком современному периоду развития математики,—к номографии.

Прежнее графическое исчисление вынуждено было для каждой конкретной задачи строить заново отдельный чертеж. Задача номографии — «черчения законов»—состоит в построении чертежа — номограммы, из которой простым способом, например

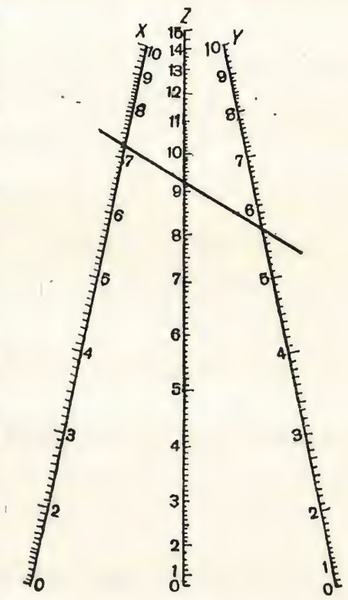


Логарифмическая бумага

наложением линейки так, чтобы она проходила через определенные ее точки, можно найти искомые величины для любого конкретного случая. Так, чтобы вычислить величину $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ с помощью прежнего графического метода вычисления, требуется всякий раз, для каждой пары конкретных заданных x и y, строить вновь прямоугольный треугольник по теореме Пифагора. Между тем номограмма позволяет простым наложением линейки, так чтобы она проходила через соответствующие точки шкал x и y (например, $x = 7{,}2$, $y = 5{,}7$), прочесть на пересечении со шкалой z приближенное значение $z \approx 9{,}2$. Такие номограммы построены для важнейших, наиболее часто встречающихся формул математики, геометрии, механики, физики, разных технических отраслей. Пользование номограммами дает возможность легкого и быстрого приближенного вычисления площадей, поверхностей, объемов, разного рода определенных интегралов, корней урав-

нений и множества других величин, иногда по весьма сложным формулам, содержащим много независимых переменных.

Теоретические основы номографического метода привел в систему Окань (1884 г.), широко использовав для этой цели проективную геометрию, в особенности идеи Штаудта (1847 г.) и параллельные координаты Шаля (1829 г.). Теория номографии, изучающая границы применения этого метода и возможности его дальнейшего расширения, разработана весьма полно благодаря работам Кларка (1907 г.), Соро (1921 г.) и советских математиков Герсеванова и Глаголева. Другой советский математик — Франк—приспособил номографический метод для графического интегрирования обыкновенных диференциальных уравнений.

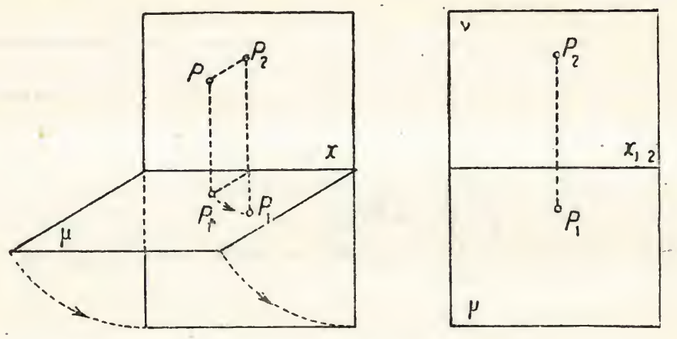


Номограмма теоремы Пифагора

Вообще для последней цели применяются те же приемы, о которых мы говорили, излагая методы численного приближения определенных интегралов и нумерических решений диференциальных уравнений, но отдельные вычислительные операции заменяются при этом графическим построением. Так, Рунге использовал метод последовательных приближений Эйлера и его усовершенствование, данное Пикаром. Чубером (1899 г.) был предложен метод огибающих. Для уравнений второго порядка Кельвин (1892 г.) дал своеобразный метод, исходящий из построения радиусов кривизны искомой кривой, этот же метод был усовершенствован Роте (1917 г.). Особые методы разработаны Мейснером (1913 г.), Мемке (1930 г.) и др.

Под конец остановимся лишь в нескольких словах на проблеме наглядного изображения пространственных форм. Сюда относятся начертательная геометрия и учение о геометрических моделях. Задача начертательной геометрии состоит в том, чтобы в двумерной плоскости изобразить наглядно трехмерные образования— поверхности и пространственные кривые. Начатки этой дисциплины имелись у Леонардо да Винчи и даже еще в X в. у арабов (ибн Алхаитам), но начертательная геометрия может считаться систематической наукой лишь с эпохи французской революции. Ее создал Монж (1795 г.), основатель известной «Нормальной школы». Положение любой точки P пространства

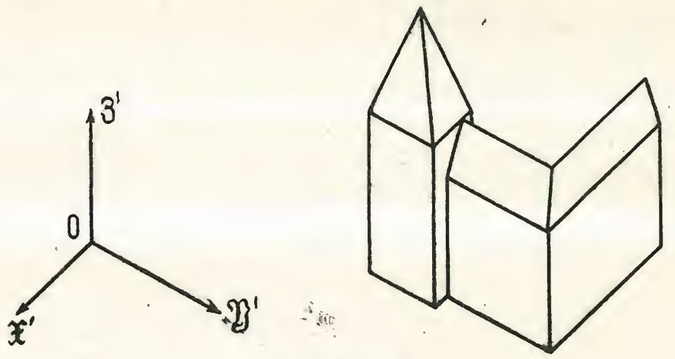
определяется здесь двумя ее прямоугольными проекциями P_1 и P_2 на две перпендикулярные плоскости μ и ν. Для того чтобы получить возможность изобразить обе эти проекции в плоскости чертежа, поворачивают затем плоскость ν вокруг



Начертательная геометрия

оси x—пересечения обеих плоскостей—так долго, пока плоскость ν не совпадет с плоскостью μ.

Наследство Монжа было широко разработано и обогащено большой школой его учеников и последователей, особенно под влиянием проективной геометрии, для которой начертательная



Аксонометрия

геометрия в свою очередь давала многочисленные стимулы. Начиная с Кузинри (1828 г.) наряду с начертательной геометрией, пользующейся прямолинейной проекцией, стала развиваться и другая ее ветвь, применяющая центральную проекцию. Примерно с того же времени развивается и так называемая а к с о н о м е т р и я — косоугольная проекция, нашедшая себе применение в кристаллографии, архитектуре и т. п. В аксонометрии три единичных взаимно-перпендикулярных вектора ξ, η, ζ, выходящие из точки O в пространстве, изображаются

как три п р о и з в о л ь н ы х о т р е з к а ξ', η', ζ', выходящих из точки O' в плоскости чертежа,—это основное положение аксонометрии, открытое Польке (1853 г.). В нем легко убедиться наглядно, изучая тени, отбрасываемые на экран тремя взаимно-перпендикулярными равновеликими стержнями при освещении их «бесконечно удаленным» проекционным фонарем. Некоторые новые идеи в этой области развиты Шеффером (1920 г.) и Круппа (1923 г.). Начертательная геометрия может быть также обобщена и для пространства многих измерений.

Вследствие упомянутого нами пренебрежительного отношения к практической математике со стороны значительной части современных математиков начертательную геометрию принято считать мало интересной, второстепенной областью. Ею мало занимаются, поэтому в ней наблюдается известный застой, и почти не выдвигаются новые проблемы. Крайне слабо разработано также учение о г е о м е т р и ч е с к и х м о д е л я х. Если идеальная прямая изображается на плоскости следами графита или туши, то в пространственной модели она представлена нитью или проволокой. Построение подобных моделей может иметь двоякую цель: они служат или для приближенного вычисления—это пространственные номограммы, (например для решения уравнений) или являются незаменимыми наглядными пособиями для изучения трудно вообразимых особенностей кривых поверхностей и пространственных кривых, для развития пространственной интуиции, для нащупывания путей и результатов исследования. Так, например, если плоская кривая имеет три вида особых точек (кроме двойных), то пространственная кривая может иметь семь видов таких точек, однако их можно различить лишь на модели, а не в перспективном изображении. Далеко не легко также не только представить мысленно, но и изобразить на чертеже особенности линейчатых поверхностей, в то время как на модели они видны наглядно.

Несомненно, что только организация крупного вычислительного института, где объединились бы все отрасли практической математики,—дело, которое становится все более необходимым для развития советской науки и всего социалистического хозяйства,—создаст базу для работ больших масштабов в области физических вычислительных методов, номографии, конструкции моделей. Такая прочная и широкая база может быть заложена лишь в нашей стране, а не там, где господствуют отрыв теории от практики, идеалистическое мировоззрение и формально-логическая методология математики.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

Математический метод и другие науки. — Теория вероятностей, ее обоснование. — Геометрическая вероятность, вероятностные методы в математических проблемах. — Математический аппарат теории вероятностей: комбинаторика, образующие функции, конечные разности, математическое ожидание, характеристические функции.—Теория ошибок.— Математическая статистика, ее применение.

Казалось бы, что, поскольку предыдущие главы содержат очерк современной арифметики, алгебры, анализа, геометрии и практической математики, можно было бы ограничиться этим и перейти к философским выводам. Но то обстоятельство, что математический м е т о д охватывает широкий круг научных дисциплин, куда входят не только те, которые на основе единства своего п р е д м е т а объединены в математике, заставляет нас несколько отодвинуть подведение итогов.

Количественные отношения и пространственные формы действительного мира, составляющие предмет математики, являются общими и основными категориями, входящими решительно во все процессы. Поэтому изучение любого материального процесса в той или в другой степени неизбежно связано и с изучением количественных отношений и пространственных форм, а значит, и с применением математического метода. Даже наиболее сложные виды движения, как, например, явления общественные, нельзя изучать, не используя при этом хотя бы простейших математических понятий и приемов: абсолютного и относительного количества, сложения и вычитания, пропорций и т. д.

Конечно, чем выше ступень движения, тем больше удельный вес метода, порождаемого самим содержанием этого движения,

и чем более второстепенную, подсобную роль играет математический метод, тем труднее применить его. Не может быть и речи о том, чтобы математический метод мог заменить в физике, химии, биологии, политэкономии специфические методы этих наук. Его применение становится возможным только тогда, когда эти методы все подготовили для него, когда все качественные взаимосвязи ясны и наступает необходимость раскрыть их с количественной и пространственной сторон. При этом математический метод должен применяться под непрерывным контролем специфического метода данной науки. Нельзя поэтому допустить и мысли о том, чтобы физика, химия, биология, политэкономия и т. п. превратились когда-либо в математические науки; такие словоупотребления, как «математическая физика», не должны толковаться превратно.

Если, таким образом, и нельзя строго расклассифицировать науки по принципу применения или неприменения ими математического метода, то все же можно сказать, что все они находятся на разных «расстояниях» от математики. Среди наиболее близких к математике дисциплин стоит уже упомянутая нами г е о д е з и я; к ним относятся также к и н е м а т и к а, г р а ф и ч е с к а я с т а т и к а, разные главы теоретической ф и з и к и (например, о п т и к и), к р и с т а л л о г р а ф и и, а с т р о н о м и и и т. д. Каждая из них имеет свой предмет, отличный от предмета математики, и отсюда вытекает и ее особый метод.

Так, например, кинематика изучает механическое перемещение тел, поверхностей, кривых и точек. Значит, в отличие от математики в ее предмет входит добавочно и понятие в р е м е н и. Или, скажем, кристаллография изучает правильные формы, принимаемые кристаллами, и, отсюда, ее предмет содержит ряд чуждых математике понятий. Но вместе с тем и кинематика, и кристаллография, и графическая статика достаточно близки к математике и по своему предмету. Методы же их являются с формальной стороны почти целиком математическими—геометрическими в кинематике и графической статике, алгебраическими в кристаллографии и т. д., хотя и они выступают на сцену только п о с л е анализа по существу, который, как бы сравительно краток он ни был, не ведется и не может вестись математическим методом.

Оставляя в стороне все эти научные дисциплины, мы займемся лишь одной, принадлежащей к этой группе близких математике, но все же отличных от нее отраслей науки,—т е о р и е й в е р о я т н о с т е й. Ее предметом является изучение в о з м о ж н о с т и, категории, которую математика не изучает, хотя при изучении ее и применяют математический метод. Но она не может быть изучена одним лишь математическим

методом, а требует в каждом отдельном случае качественного исследования по существу. Действительно, в теории вероятностей, прежде чем пустить в ход математический метод, нужно сначала установить равновозможность отдельных событий, а этого нельзя сделать математическим путем. На несвойственный математике круг идей теории вероятностей указывает между прочим и то, что такие крупнейшие математики, как Лейбниц и д'Аламбер, не освоившиеся с этой, тогда еще молодой, теорией, неправильно определяли равновозможные случаи. Так, Лейбниц (1683 г.) считал, что при бросании двух игральных костей для выпадения суммы 12 или 11 имеется одинаково по одной возможности, а для выпадения суммы 7—три возможности. На деле же это количество возможностей для 12 равно одной, для 11—двум, а для 7—шести. Д'Аламбер (1754 г.) ошибочно отрицал правильность общепринятого теперь подсчета равновозможных событий при игре в орлянку, предлагая при бросании двух монет вместо четырех случаев—1) орел, орел, 2) решетка, орел, 3) орел, решетка, 4) решетка, решетка—считать лишь три случая: 1) орел; 2) решетка, орел; 3) решетка, решетка,—мотивируя это тем, что если при первом бросании выпадет орел—второе становится излишним.

Понятно, например, что, для того чтобы выпадения любой из шести граней кости считать равновозможными, необходимо сделать какие-то предположения и о строении самой кости и о способе ее бросания, предположения, которые обыкновенно скрываются под расплывчатыми требованиями «правильной» кости и «случайного» характера бросания (к чему мы еще вернемся) и явно относятся не к математике, а, в данном примере, к физике.

Хотя, как видно, теория вероятностей и не является собственно частью математики, так как содержит в себе чуждый ей элемент—категорию возможности,— все же это не мешает тому, что, как только равновозможные случаи установлены, математический метод вступает в свои права и господствует в ней безраздельно. Но категория возможности является весьма общей категорией, благодаря чему сама теория вероятностей, в отличие от кристаллографии, графической статики и т. д., приобретает исключительно широкое теоретическое и практическое значение. Все это вместе не только оправдывает включение теории вероятностей в круг наших рассмотрений, но и подтверждает логическую правоту того исторического факта, что теорию вероятностей всегда включали в математику как ее хотя и побочную, но составную часть.

Логически казалось бы правомерным, что наряду с теорией вероятностей должна существовать и общая математическая

теория динамических закономерностей, детерминированных в явном виде. Однако отдельные исследования Биркгоффа и др. по общей динамике, в особенности исследования такого общего явления, как последействие, не дают еще основания считать, что подобная наука сложилась в самостоятельное целое.

Первые начатки теории вероятностей связаны с именами итальянских математиков середины XVI в. Тарталья и Кардано, пытавшихся исследовать игру в кости, но научное обоснование она получила лишь в XVII в. в работах Паскаля (1654 г.), Якова Бернулли (1713 г.) и Лапласа (1812 г.). Будучи на протяжении всей своей истории неразрывно связана с возникновением и развитием капиталистического строя, теория вероятностей зародилась как теория азартных игр. Правда, игры эти были известны еще древним, но она возникла именно тогда, когда экономический строй с его денежной формой обмена, рынком и конкуренцией сделал их массовым явлением. В головах людей создалось прочное представление о равновозможности, о равенстве шансов на выигрыш, игра стала невольно восприниматься как слепок с поверхности буржуазного общества. Начавшись с азартных игр и перейдя затем на услужение страховому делу (особенно в Англии и Голландии XVII в.), теория вероятностей была, наконец, в эпоху французской революции использована для «обоснования» буржуазной экономики, буржуазного правосудия и парламентаризма. На этот раз рыночное «равенство», предварительно превращенное в основу теории вероятностей, должно было послужить теоретическим обоснованием всех последствий капиталистического способа производства. Круг замкнулся, и понятно, почему все эти известные теории Курно, Пуассона и др. не могли дать никаких положительных результатов.

Зато блестящими становятся успехи теории вероятностей, когда она применяется не для того, чтобы подменить исследование по существу поверхностным описанием случайных, и, якобы, беспричинных явлений, а в качестве вспомогательного метода, подчиненного специфическому методу той области науки, к которой принадлежит данный исследуемый процесс. Теория ошибок и статистика—вот важнейшие ответвления теории вероятностей, находящие себе столь многочисленные применения во всех областях науки и техники.

Как уже сказано, отправной точкой теории вероятностей является определение числа равновозможных событий N. Когда такое определение построено, устанавливают уже чисто математическими приемами число благоприятных событий n среди них. Отношение всех благоприятных ко всем равновозможным событиям называется

вероятностью $p = \frac{n}{N}$ наступления данного благоприятного события.

В историческом развитии теории вероятностей известны различные понимания равновозможности. Лаплас полагал, что два события равновозможны тогда, когда нет никакого основания считать наступление одного из них более возможным, чем наступление другого. Но это определение явно несостоятельно, так как оно, исходя из так называемого «принципа недостаточного основания», устанавливает чисто субъективный признак равновозможности, а именно, отсутствие у нас знаний.

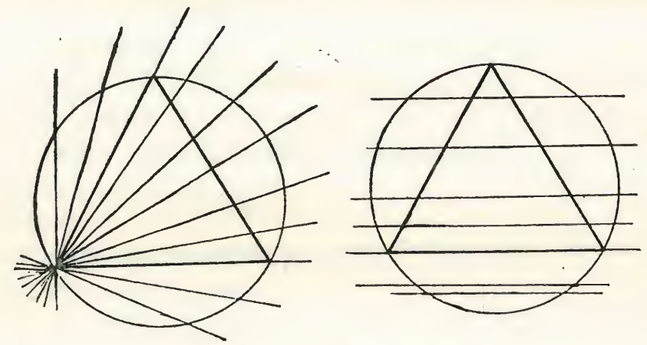
Иначе подошел в новейшее время к этому вопросу Мизес (1920 г.). Он рассматривает ряд, состоящий из N уже свершившихся событий, среди которых n являются благоприятными. Если при возрастании N до бесконечности отношение $\frac{n}{N}$ имеет предел, то этот предел он считает вероятностью $p = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{n}{N}$.

Но сказать что-либо об отношении $\frac{n}{N}$ мы можем, лишь имея перед собой весь ряд. Таким образом, вероятность отождествляется здесь с частостью, которая, являясь результатом ряда экспериментов, устанавливается эмпирически и не может поэтому служить нам для предсказывания этих результатов. Кроме того здесь нет никаких оснований для применения математического понятия предела, так как вполне возможно, что частость $\frac{n}{N}$ сначала, скажем, миллион раз будет равна нулю, затем биллион раз единице и т. п. Наконец, вполне в духе махистской философии, вероятность не выводится здесь из данного действительного материального процесса, а накладывается на него, вводится просто как «удобный» символ, не связанный с самым существом этого процесса.

Несостоятельность обоснования понятия вероятности как Лапласом, так и Мизесом особенно хорошо демонстрируют противоречия, встречающиеся в геометрических вероятностях. В качестве примера укажем на парадокс Бертрана (1889 г.). Пусть требуется определить вероятность того, что хорда, произвольно проведенная в данной окружности, будет больше, чем сторона вписанного в нее равностороннего треугольника. Эта вероятность окажется равной $\frac{1}{3}$, если мы будем считать равновозможными все хорды, исходящие из любой точки периферии окружности в разных направлениях, но она будет равана $\frac{1}{2}$, если мы будем считать равновозможными все хорды, параллельные любому диаметру. Устанавливая здесь

равновозможные события каким-либо другим путем, мы можем получить для значения вероятности любую правильную дробь. Как видно, в геометрических вероятностях установление равновозможных событий выражается в том или другом выборе координат.

Отличает геометрические вероятности то, что как равновозможные, так и благоприятные случаи составляют здесь бес-



Парадокс Бертрана

конечные множества мощности континуум. Поэтому вероятность p получают в виде отношения двух интегралов, выражающих объемы этих множеств

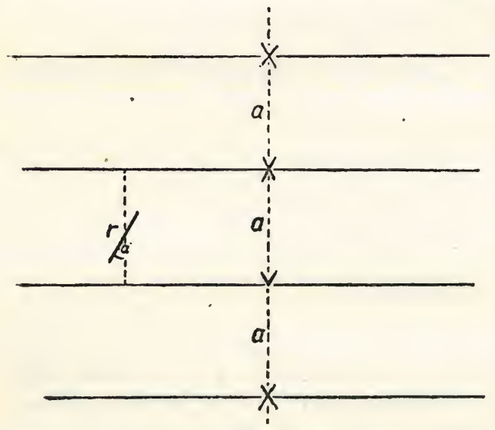
$$p = \frac{\iiint\limits_{n} \ldots dx\,dy\,dz \ldots}{\iiint\limits_{N} \ldots dx\,dy\,dz \ldots}.$$

С развитием теории множеств это понятие было уточнено, каждый из встречающихся здесь интегралов стали рассматривать как интегралы Лебега или Стильтъеса, количество равновозможных событий как меру множества, а вероятность p как частное меры множества благоприятных и меры множества равновозможных

$$p = \frac{\operatorname{mes}|\mathfrak{n}|}{\operatorname{mes}|\mathfrak{N}|}.$$

Наконец, сознавая несостоятельность всех прежних обоснований теории вероятностей и используя современный аксиоматический метод, математики делают в последние годы попытки ввести понятие равновозможности аксиоматическим путем. Наиболее совершенно эта аксиоматизация разработана советским математиком Колмогоровым (1933 г.), создавшим формально безупречную теорию.

Из многочисленных задач на геометрическую вероятность мы упомянем еще задачу Бюффона (1777 г.) о бросании иглы. Спрашивается, какова вероятность, что игла, имеющая длину r, брошенная на горизонтальную плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими на расстоянии a друг от друга, пересечет одну из этих прямых? Если считать равновозможными событиями положения, когда середина иглы находится где-либо между параллельными под каким-либо углом к прямой, то мы получим вероятность $p = \frac{2r}{\pi a}$ для случаев, когда $r<a$. Отсюда имеется возможность установить опытным путем значение π; так, Вольф из 5000 бросаний нашел $\pi \approx 3,1596$.



Задача Бюффона

То обстоятельство, что вероятность может служить для определения числа π, представляет нечто мистическое, необъяснимое для тех, кто связывает понятие вероятности с абсолютным, ничем не обоснованным случаем. С нашей же точки зрения следует объяснить лишь, почему действительно указанный выбор равновозможных случаев соответствует механизму бросания иглы, но это не может быть объяснено средствами одной математики, а только с помощью законов механики бросания.

К геометрическим вероятностям примыкает и другой ряд вероятностей, имеющих дело с бесконечным множеством,—их мы встречаем при применении теории вероятностей к проблемам арифметики и теории функций. Эта область широко разработана Борелем (1926 г.). Если задана какая-либо последовательность цифр, например, десятичных знаков числа $\sqrt{2}$, числа $\log 2$ или числа π, то можно спросить, какова вероятность, что, скажем, цифра 3 встретится один раз среди любых, следующих подряд, десяти знаков. Если считать появления любой из цифр от 0 до 9 равновозможными событиями, то во всех трех примерах мы получим один и тот же ответ $p = \frac{1}{10}$. Но трудность в подобных задачах заключается именно в определении равновозможности, которое должно исходить из арифметических закономерностей, поскольку здесь изучаются арифметические процессы. Так, в тривиальном случае, для числа $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ ясно, что искомая вероятность $p = 1$.

К такого рода проблемам относится и интересная задача Чебышева (1845 г.), в которой требуется определить вероятность того, что рациональная дробь, числитель и знаменатель которой написаны наудачу, окажется несократимой. Если считать равновозможными событиями получение остатков 0, 1, 2, ..., a—1 при делении числителя (а также и знаменателя дроби) на a и независимо от этого остатков 0, 1, 2,... b—1 при делении их на b и т. д., то для искомой вероятности мы получим $p = \frac{6}{\pi^2}$. Но здесь мы наталкиваемся на серьезное противоречие. Ведь из сделанных предположений о равновозможности следует, что вероятность того, что написанное число, например числитель, будет иметь определенное значение (скажем, не превышающее заданное число M)—равна $\frac{1}{\infty} \to 0$, между тем мы можем написать всегда лишь конечное число. Обыкновенно вероятность, равная 0, обозначает ложность, а вероятность, равная 1, истинность какого-либо предположения, но здесь, в случае бесконечных множеств, это, повидимому, может и не выполняться.

Возникает вопрос, не теряет ли в таких случаях теория вероятностей познавательной ценности, применима ли она вообще к подобного рода множествам? Бернштейн (1927 г.) утверждает, что Марков, развивший вслед за Чебышевым это, якобы, ошибочное доказательство, смешал вероятность с частостью и что вообще применение теории вероятностей к проблемам теории чисел допустимо лишь на правах известной аналогии. На деле же нельзя отыскать ни одного заслуживающего внимания возражения против применения теории вероятностей к арифметике, если она применима к геометрии, физике и т. д. В полученном противоречии повинна не теория вероятностей. Оно происходит из того же источника, из которого возникают уже знакомые нам парадоксы теории множеств. В частности оно зависит от небрежного обращения с понятием предела.

Можно еще предположить, будто в подобного рода задачах, как задача Чебышева, не существует такого механизма, который обеспечивал бы равновозможность появления остатков 0, 1, 2, ... a—1 при делении на a. Однако, как доказал Камке (1932 г.), такой механизм действительно существует, и результат Чебышева $p = \frac{6}{\pi^2}$ получается в виде предела. Можно, впрочем, построить простой механизм, обеспечивающий получение взятых «наудачу» дробей—вынимание чисел из урны, содержащей большое количество чисел N, с обязательным возвратом и перемешиванием, причем каждую пару вынутых подряд чисел будем испытывать на сократимость.

Аксиоматизируя теорию вероятностей, мы вольны придать ей—как это можно сделать с любой аксиоматизированной теорией—различные толкования, принимая, например, за вероятность меру множества и т. п. Тогда, в том же смысле как трехмерная эвклидова геометрия применяется к изучению функций двух переменных $z = f(x, y)$, теория вероятностей сможет служить нам для изучения закономерностей теории чисел.

Ища выхода из трудностей, связанных с формально-математическим определением понятия вероятности, Смолуховский (1918 г.) выдвинул принцип, согласно которому определение равновозможности событий зависит от динамики данной проблемы. Закономерности, устанавливаемые теорией вероятностей, являются таким образом производными от закономерностей, причинно определяющих события. Если, например, в задаче Бюффона мы создадим какой-то особый механизм бросания, то получим результат, отличный от приведенного выше. Так, если прямые линии заменить намагниченными проволоками, а иглу сделать из мягкого железа, то получим $p = 1$.

Идеи Смолуховского разрабатываются в настоящее время Стройком (1934 г.), Гопфом (1934 г.), Биркгоффом (1931 г.). Мы получаем теперь возможность ответить, например, на вопрос, каковы необходимые и достаточные условия для того, чтобы выпадение граней куба было равновозможным. Оказывается, центр тяжести куба должен совпадать с его геометрическим центром и его эллипсоид инерции должен быть шаром. В свете этих же идей положение Пуанкаре о том, что вероятностные закономерности относятся к процессам, в которых малые изменения причин вызывают большие изменения следствий, получает новое, глубокое толкование.

Перейдем теперь к математической стороне теории вероятностей. Понятно, что и она не оставалась неизменной, а развивалась в зависимости от увеличивающейся сложности встречающихся задач и от тех новых методов, которые создавал для нее прогресс математики в целом. При своем зарождении теория вероятностей была тесно связана с алгеброй, а именно с учением о соединениях (комбинаторикой), посредством которой устанавливалось в простейших задачах количество равновозможных событий.

Так, пусть требуется найти вероятность того, что из урны, в которой находятся шары, помеченные буквами B, E, I, L, L, N, O, R, U, они будут вынуты в последовательности, образующей слово *BERNOULLI*. Сначала нужно установить количество равновозможных событий, т. е. все перестановки из 9 букв (учтя, что среди них 2 одинаковые), равное $\frac{9!}{2!} = 181\,440$, и тогда

искомая вероятность будет равна $\frac{1}{181\,440}$. Заметим, что такова же вероятность появления этих букв и в любом другом порядке. Появление их в порядке, представляющем осмысленное слово, кажется нам менее вероятным только по психологическим причинам.

Развивая дальше этот метод, Лаплас вывел два общих принципа, известных под названием теоремы сложения и теоремы умножения вероятностей. Первая из них относится к взаимно исключающимся, вторая—к совместным событиям. Лишь благодаря этим принципам теория вероятностей стала самостоятельной научной дисциплиной.

Уже давно математики заметили, что существует поразительная аналогия между процессом нахождения всех случаев, возможных при совпадении двух или нескольких рядов событий, и между образованием произведения двух или нескольких многочленов. Так, например, если вычислить

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n,$$

то коэфициент при x^s будет равен количеству случаев, дающих при бросании n костей сумму очков, равную s. Лапласом (1781 г.) этот метод был разработан дальше и превращен в метод образующих функций. Однако, несмотря на свое остроумие, он был вскоре вытеснен связанным с ним методом конечных разностей, применяемым здесь впервые Муавром (1738 г.). Этот метод остался затем вплоть до конца XIX в. единственным методом теории вероятностей.

Например, требуется решить, какова вероятность того, что мы извлечем в один прием из урны, содержащей n шаров, четное число шаров. Пусть g_n обозначает количество всех возможных извлечений четного числа шаров, а u_n—количество всех возможных извлечений нечетного числа шаров из нашей урны. Если мы увеличим количество шаров в урне на 1, то g_{n+1} будет складываться из прежних g_n, к которым прибавится u_n, так как с присоединением одного шара каждое извлечение нечетного числа шаров может превратиться в извлечение четного числа шаров. Таким образом, мы получим

$$g_{n+1} = g_n + u_n.$$

Аналогично u_{n+1} будет складываться из прежних u_n, далее из g_n (так как каждое извлечение четного числа шаров может превратиться в извлечение нечетного числа шаров) и, наконец, еще из одного случая, а именно извлечения самого $n+1$-го шара. Таким образом,

$$u_{n+1} = u_n + g_n + 1.$$

Эта система двух уравнений в конечных разностях легко сводится к уравнению $g_{n+1} - 2g_n - 1 = 0$, и его решением будет $g_n = 2^{n-1} - 1$. Отсюда следует, что $u_n = 2^{n-1}$ и

$$p = \frac{u_n}{g_n + u_n} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}.$$

Вероятность извлечь нечетное число шаров равна $q = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$. Значит, каково бы ни было количество шаров в урне, вероятность извлечь нечетное число их меньше, чем вероятность извлечь четное число.

Целиком отражает денежно-рыночное происхождение теории вероятностей понятие математического ожидания, введенное Лапласом. Под этой важной вспомогательной величиной понимают произведение возможного выигрыша на вероятность этого выигрыша, если дело идет о таких явлениях, как азартные игры, капиталистическая купля-продажа, биржевая игра и т. п. Оно обобщено затем в определении: математическое ожидание величины x, могущей принять значения x_1, $x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $P_1, P_2, \ldots, P_n$, равно сумме $P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n$. Метод математического ожидания был особенно разработан русской школой—Чебышевым, Ляпуновым, Марковым. Чебышеву (1867 г.) принадлежит открытие следующего знаменитого неравенства: если какая-либо величина может принять значения x_1, x_2, ... с математическими ожиданиями a_1, a_2, ... и если математические ожидания квадратов $x_1^2, x_2^2, \ldots$ суть $b_1, b_2, \ldots$, то вероятность p того, что сумма $x_1 + x_2 + \ldots$ лежит в границах $a_1 + a_2 + \ldots \pm t\sqrt{b_1 + b_2 + \ldots - a_1^2 - a_2^2 - \ldots}$, будет равна

$$p > 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Из этого неравенства Чебышев легко вывел теорему Якова Бернулли (1713 г.), являющуюся простейшей формулировкой закона больших чисел Пуассона (1837 г.).

Теорема Бернулли трактует о процессах, состоящих из многократного повторения одного и того же опыта, при котором могут наступить лишь два взаимно исключающих друг друга события A и B. Примером может служить извлечение шара из урны, содержащей только белые и черные шары. Теорема Бернулли состоит из двух положений. Во-первых, из утверждения, что ожидаемые с наибольшей вероятностью часто́ты m и n появления обоих событий A и B относятся друг к другу как вероятности p и q отдельных событий. Так, например, при бросании кости вероятность того, что выпадет шестерка, равна $p = \frac{1}{6}$,

что она не выпадет— $q = \frac{5}{6}$. Если мы бросим кость $s = 10$ раз, то наиболее вероятно, что шестерка выпадет $m = 1$ раз и что она не выпадет $n = 9$ раз, таким образом

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{1}{9} - \frac{1}{5} = -0{,}08889.$$

Если же мы бросим кость $s = 100$ раз, то соответственно получим наиболее вероятные частоты $m = 16$, $n = 84$ и

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = -0{,}00952.$$

Эта же разность для $s = 1\,000$ будет равна —0,00096, для $s = 10\,000$ она составит всего лишь—0,00009 и т. д. Более точно это формулируют так: вероятность w того, что будет иметь место равенство $\lim\limits_{s\to\infty}\left(\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right) = 0$, имеет своим пределом достоверность, т. е. $\lim\limits_{s\to\infty} w = 1$. Во-вторых, теорема Бернулли состоит из определения вероятности того, что действительно получаемые эмпирически частоты m' и n' не будут уклоняться от наиболее вероятных частот m и n больше, чем на заданные числа ε и η. Это вторая часть теоремы, требующая для своего вывода применение приближенной формулы Стирлинга для $n!$, была в окончательном виде выведена лишь Лапласом, который нашел, что отношения $\frac{m}{s}$ и $\frac{n}{s}$ будут находиться в границах $p \mp t\sqrt{\frac{2pq}{s}}$, $q \pm t\sqrt{\frac{2pq}{s}}$ с вероятностью, приблизительно равной $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt + \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2spq\pi}}$. Пуассон обобщил теорему Бернулли, применив ее к процессам, в которых вероятность изменяется от опыта к опыту, как это имеет место, например, при извлечении шаров из урны без обратного возврата их туда после каждого извлечения.

Значение закона больших чисел состоит в том, что он является универсальной количественной формой проявления закономерностей стохастических т. е. неупорядоченных массовых процессов. Сюда относятся как закономерности распределения ошибок при измерениях, закономерности движения молекул газа или электронов, так и экономические закономерности капиталистического способа производства. Закон больших чисел характеризует их через средние величины. Этот закон, по существу примененный Марксом в «Капитале» для объяснения, например, ценообразования, равенства суммы стоимостей и суммы цен производства и т. п., с полным правом может быть

назван также законом средних чисел. Ленин писал об этом следующее: «Маркс показывает, что форма цены, в которой выступает меновое отношение, наилучше приспособлена именно к такому способу производства, при котором правило может прокладывать себе путь сквозь беспорядочный хаос только как слепо действующий закон средних чисел». И далее: «...вполне естественно, что в обществе разрозненных товаропроизводителей, связанных лишь рынком, закономерность не может проявиться иначе, как в средней общественной массовой закономерности, при взаимопогашении индивидуальных уклонений в ту или другую сторону».

Познавательная ценность закона больших чисел не может быть, конечно, умалена ни его происхождением, которое отображает устойчивость меновых отношений, колеблющихся вокруг определенной средней, ни многократными попытками использовать этот закон в качестве математической базы буржуазной экономической науки в целях апологии капитализма. Приравнивая, якобы, наблюдаемую в массовом масштабе устойчивость процента убийств, самоубийств, безработицы и т. д. к устойчивости процента рождений мальчиков и девочек, буржуазные статистики в роде Зюсмильха полагают, что при посредстве закона больших чисел выясняется «воля божия» и подтверждается незыблемость и вечность буржуазного строя. А применяя по-своему закон больших чисел и вытекающие из него следствия, разоблаченные в свое время ученые вредители Кондратьев, Громан, Базаров и другие, захватив руководящие посты в Конъюнктурном институте Наркомфина и ЦСУ, пытались навязать советскому народному хозяйству теории «затухающей кривой», «циклического развития», одним словом, «неизбежную», основанную на «непреложных научных законах», реставрацию капитализма.

Возможность широкого применения закона больших чисел к стихийным массовым процессам, а также и пределы допустимости его применения основаны на том, что из него выводят обратную теорему Бернулли. Смысл ее состоит в том, что наблюдаемое на опыте отношение $\frac{m}{s}$ (числа появившихся событий m к общему числу опытов s), называемое статистической или эмпирической вероятностью определенного события, дает приближенное значение неизвестной вероятности p появления этого события, причем с точностью, возрастающей вместе с s безгранично, если только верно предположение, что вероятность p—величина постоянная. Именно в этой формулировке закон больших чисел становится главным законом статистики.

Понятно, что если условие не соблюдено, если процесс подобен такому извлечению шаров из урны, когда всякий раз вынимают большое количество шаров, не возвращая их обратно, то теорема неприменима, так как здесь вероятность p—величина переменная. Поэтому, например, нечего удивляться тому, что пресловутый «экономический барометр» Гарвардского университета (США), делавший довольно удачно конъюнктурные предсказания в период «просперити», непоправимо оскандалился, не «учтя» наступления кризиса. И совершенно очевидно, что в нашем социалистическом хозяйстве, где планомерная воля партии, неутомимая энергия всего трудящегося народа прибавляют в «урну» ежегодно несметное множество новых «шаров», всякие попытки предсказать наше развитие, основываясь на закономерностях стихийного процесса, просто смехотворны.

Способ рассуждения, с которым мы встречаемся в обратной теореме Бернулли, в корне отличен от того способа, который мы применяем, говоря, например, о вероятности выпадения шестерки при бросании кости. В то время как там событие только еще должно наступить и вероятность служит для оценки этой возможности (вероятность a priori), здесь событие уже совершилось и вероятность оценивает причину, вызвавшую его (вероятность a posteriori).

Если, например, из урны, содержащей s шаров неизвестно какого цвета, было в n извлечениях вынуто ровно n белых шаров (причем всякий раз вынутый шар возвращался в урну), то для объяснения такого явления может быть выдвинуто n предположений, относящихся к возможному количеству белых шаров в урне. Можно ставить вопрос о том, какова вероятность p_n, что все n шаров белые, или, наоборот, вероятность p_1, что белым будет лишь один шар, наконец, о вероятности какого-либо другого кроме указанных крайних предположений о составе урны. Здесь мы получим

$$p_n = \frac{s^n}{1^n + 2^n + \ldots + s^n}, \quad p_1 = \frac{1}{1^n + 2^n + \ldots + s^n}.$$

Вероятность a posteriori, которую называют также вероятностью причин или вероятностью гипотез, была впервые применена Бейесом (1763 г.). Наибольшее значение имеет относящаяся сюда задача определения вероятности того, что событие, уже появившееся в $m + n$ опытах m раз, появится в следующих $r + t$ опытах r раз. Эта вероятность, как показал Кондорсе (1785 г.), равна:

$$p = \frac{(m+n+1)!\,(m+r)!\,(n+t)!}{m!\,n!\,(m+n+r+t+1)!}.$$

Если, например, считать, что возраст человечества равен приблизительно 300 000 лет, или $m \approx 110\,000\,000$ суток, в течение кото-

рых люди наблюдают чередование дня и ночи, то отсюда, по Кондорсе, формально следует, что вероятность наступления завтрашнего дня отличается от единицы (достоверности) лишь на $\frac{1}{110\,000\,002}$.

Именно эти вероятности гипотез применялись энциклопедистами для обоснования справедливости буржуазного парламентаризма и суда присяжных, а в виде вероятности свидетельских показаний их намеревались применять как практическое орудие в судебном деле. Допуская, что на всем этом можно построить ряд занимательных задач, нечего и доказывать, что благодаря множеству произвольных предположений, которые приходится делать, никакой практической ценности они не имеют. Зато высока идеологическая «ценность» этих упражнений; они превосходно использовались и для «научного» доказательства достоверности религиозных басен. Русский математик Буняковский (1846 г.), выступая в защиту мракобесия, писал: «Некоторые философы в видах предосудительных пытались применять формулы, относящиеся к ослаблению вероятности свидетельств и преданий, к верованиям религиозным и тем поколебать их... Когда этот разбор приведет нас к заключению, что в духовном мире есть такие факты, которые не подчинены физическим законам, тогда все злонамеренные умствования лжефилософов рушатся сами».

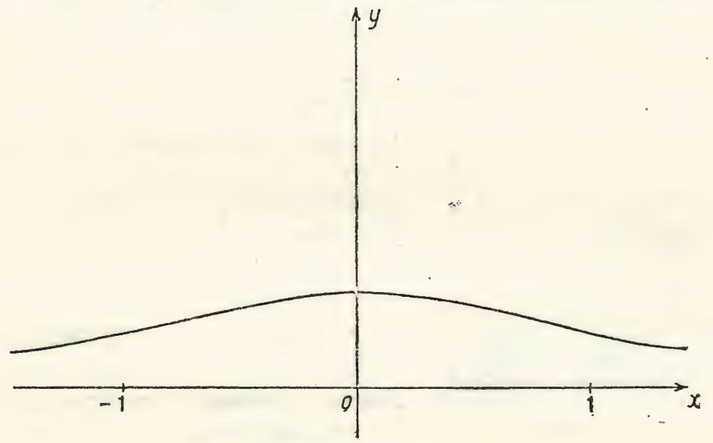
Теория ошибок представляет собой одно из важнейших применений теории вероятностей. Говоря о практической математике, мы уже рассказали о собственно-математической стороне проблем выравнивания ошибок, оставив обоснование этого метода открытым. Задача состоит сейчас в том, чтобы обосновать этот метод, названный методом наименьших квадратов, согласно которому, как мы уже знаем, неизвестные величины следует определить так, чтобы сумма квадратов разностей между их теоретическими и измеренными значениями была минимумом. Первое обоснование этого метода было дано Гауссом в 1809 г., который вывел названный его именем закон ошибок $p = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}\,dx$, выражающий вероятность p того, что какой-либо измеренной величине x присуща ошибка, лежащая между $-\delta$ и $+\delta$, причем коэфициент h означает меру точности данного ряда измерений. Кривая

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}},$$

получающаяся для $h = \frac{1}{2}$, называется кривой Гаусса, или

нормальной кривой распределения вероятностей. Из закона ошибок именно и следует, что наиболее вероятным значением неизвестной x будет то значение, для которого сумма квадратов ошибок составит минимум.

Однако при выводе закона ошибок Гаусс пользовался постулатом об арифметической средней, гласящем, что наивероятнейшее значение неизвестной равно арифметической средней из прямых измерений, т. е. постулатом, который сам нуждается в обосновании. Поэтому неоднократно делались попытки по-новому обосновать метод наименьших квадратов.

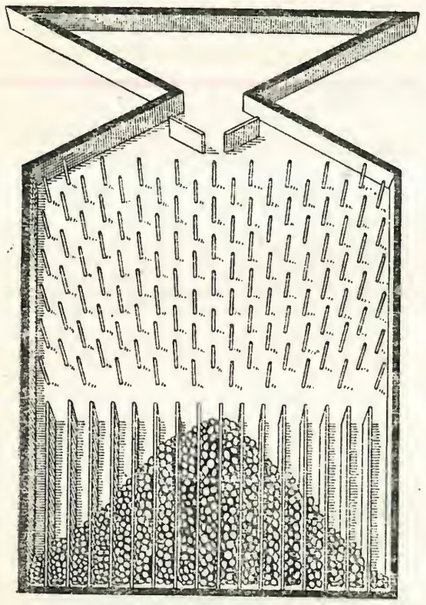


Кривая Гаусса

Наиболее известны доказательство Лапласа (1811 г.) и второе доказательство Гаусса (1821 г.), однако и их нельзя считать строгими. Некоторые математики, признавая, что метод наименьших квадратов не может быть обоснован аналитическим путем, вводят его аксиоматически, другие же считают его просто эмпирическим правилом. В пользу последнего взгляда приводится доска Гальтона (1908 г.), на которой бросаемые через воронку дробинки после отталкивания вправо и влево от вбитых в доску косыми рядами штифтиков собираются вдоль ее нижнего ребра, заполняя площадь по гауссовой кривой, и тем самым как бы воплощают нормальное распределение вероятностей ошибок.

Благодаря своему эмпирическому происхождению метод наименьших квадратов, применяемый в разнообразнейших областях, все же не является единственным универсальным методом выравнивания. Доказательством этому может служить тот факт, что имеются, правда, редкие случаи, где постулат об арифметическом среднем явно несостоятелен, как это, например, показал Зелигер (1893 г.) для визуальных фотометрических измерений в астрономии. Рядом математиков в новейшее время были предложены другие законы распределения вероятностей.

В частности Пуанкаре (1896 г.), высказав предположение, что вероятность некоторого отклонения зависит не только от величины отклонения, как это допускал Гаусс, замечает, следуя своей остроумной, но вместе с тем и легкомысленной манере выражаться: «Каждый верит в экспоненциальный закон ошибок: экспериментатор потому, что он думает, что этот закон может быть доказан математиком, а математик потому, что он верит, что закон установлен наблюдениями». На самом деле лишь Гаусдорфф (1901 г.), построив пример, когда большое количество причин, каждая из которых вызывает очень малые отклонения, не приводит в результате совместного действия к нормальному распределению Гаусса, вскрыл условия, при которых распределение Гаусса не соответствует действительности.



Доска Гальтона

Для того чтобы иметь возможность сравнить между собой точность различных рядов измерений, теория выравнивания вводит понятия средних и вероятных ошибок. Если x_1, x_2, ..., x_n измеренные значения какой-либо величины x, тогда

$$\varepsilon_1 = x - x_1,\ \varepsilon_2 = x - x_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n = x - x_n$$

представляют собой истинные ошибки,

$$\varphi = \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \ldots + |\varepsilon_n|}{n} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

среднюю ошибку, а

$$\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2}{n}} = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

среднюю квадратическую ошибку, или стандартное отклонение. Кроме того, если все ошибки написать в ряд, в порядке их возрастания, то ошибку ρ, стоящую посредине ряда, называют вероятной ошибкой, или квартилем. В самом деле, одинаково вероятно, что какая-либо ошибка будет меньше или больше, чем вероятная ошибка. Исходя из этого, мы получаем условие

$$\int_{-\rho}^{+\rho} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}\, dx = \frac{1}{2},$$

откуда $\rho = \frac{0{,}476936}{h}$. Значение x, стоящее посредине последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соответствующее вероятной ошибке ρ, называют медианой.

Гаусс нашел, что наиболее вероятное значение h может быть определено из действительных ошибок, а именно

$$h' = \sqrt{\frac{n}{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2)}},$$

с тем большей точностью, чем больше n, так как вероятность того, что истинное значение h лежит между

$$h'\left(1 - \frac{0{,}476936}{\sqrt{n}}\right)$$

и

$$h'\left(1 + \frac{0{,}476936}{\sqrt{n}}\right),$$

равна $\frac{1}{2}$. Проделав аналогичное вычисление и для других способов получения стандартного отклонения, Гаусс установил, что именно способ извлечения квадратного корня из среднего квадрата дает наименьшее значение вероятной ошибки, значит, является наиболее выгодным.

В практических задачах мы не можем, конечно, определить значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ истинных ошибок и вынуждены заменить их приближенными ошибками $\lambda_1 = \bar{x} - x_1$, $\lambda_2 = \bar{x} - x_2, \ldots, \lambda_n = \bar{x} - x_n$, где, $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ обозначает среднее значение измеряемой неизвестной величины. Тогда, употребляя знакомые нам скобки Гаусса, мы будем иметь $[\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{[\varepsilon^2]}{n}$ и отсюда $\sigma = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$. Получив оценки отдельных измерений, мы сможем сопоставить их, вводя понятие веса, причем определим его так, чтобы одно измерение с весом p было равнозначно p измерениям, обладающим каждое весом, равным 1.

Теория выравнивания ошибок является по существу лишь частным случаем математической статистики, начало жизни которой (например, так называемая «политическая арифметика» Петти (1683 г.)) дало также и начало оживленному развитию теории вероятностей. Первым предметом, изучаемым статистикой, явился обмен, а затем уже вопросы рождаемости, смертности и т. д. Совокупность меновых отношений, характерная внешней изолированностью огромной массы единичных актов, на деле внутренне связанных исторически установившей-

ся системой разделения труда, является прообразом всякой статистической совокупности или коллектива: возникновение средней цены из хаоса случайных отклонений отдельных цен внешним образом отражает закон стоимости, действующий в качестве внутренней причины. Таким образом, предметом статистики является изучение массовых процессов, в которых внешне независимые элементы в действительности обладают внутренней связью. Это марксистское определение статистики было дано Хотимским (1930г.) в противовес буржуазным теоретикам (Пирсон, Фишер, Борткевич, Митчель, Боули, Парето и др.) и их эпигонам у нас (Смит и др.), считающим предметом статистики любую массовую совокупность, объединенную формальным «сводным» признаком. Хотимский, Ястремский, Старовский, Боярский и др. успешно разрабатывают теорию марксистской статистики.

Важнейшим следствием из марксистского определения статистики является признание необходимости всякий раз устанавливать, представляет ли данная совокупность коллектив, действительно ли и в каких пределах элементы ее связаны единой закономерностью. Это не может быть сделано статистическим, математическим путем, а только при посредстве теории данной изучаемой области явлений—политэкономии, физики, биологии, астрономии и т. п. Уже после этого теоретическая статистика рассматривает коллектив в его абстрактной форме, отрываясь совершенно от его содержания, наподобие того, как это делает и математика, но, так же как для математики, и для теоретической статистики «отсюда вовсе не следует, что рассудок в чистой математике имеет дело только со своими «собственными творениями и фантазиями»[1].

Применение теории вероятностей к статистическим совокупностям основывается на обратной теореме Бернулли в той аналитической формулировке, которую дал ей Лаплас. Используя ее, математическая статистика занимается, во-первых, определением степени достоверности статистических данных, во-вторых, сравниванием двух рядов событий и в особенности изучением степени их связи, в-третьих, изысканием количества наблюдений, необходимых для того, чтобы отклонения эмпирических данных от теоретически предвычисленных величин не превышали заданных пределов.

Для характеристики соответствия между теорией и действительностью служит так называемый эмпирический коэффициент дисперсии D, введенный Марковым, теоретическое значение которого равно 1. Если большое количество N опытов разбить на s равных групп, по n опытов в каждой,

[1] Маркс и Энгельс, Собр. соч., т. XIV, стр. 38—39.

в которых это событие (теоретически имеющее постоянную вероятность p) появляется m_1, m_2, ..., m_s раз, то получим $D = \sum_{k=1}^{s} \frac{(m_k - np)^2}{N_p(1-p)}$. При этом допустимые границы уклонения D от единицы устанавливаются неравенством Чебышева или формулой Лапласа.

Строя кривую распределения частот по отдельным значениям—вариантам изменяющегося признака—так называемую огиву и сравнивая ее форму с кривой Гаусса, определяют отдельные параметры данного статистического процесса. Английский статистик Пирсон (1895 г.), исходя из правильного соображения, что допущение о равномерном распределении, лежащее в основе теоретической кривой, далеко не всегда отвечает действительности, ввел целых 14 типов кривых распределения. Однако, как показал Ястремский (1927 г.), Пирсон при выводе своих кривых допустил математическую ошибку, не говоря уже о том, что он пользуется ими чисто формально. Для подбора кривых распределения служит также ряд Грама—Шарлье, способ, более обоснованный и менее громоздкий, чем кривые Пирсона. Важную роль играет в статистике теория индексов, показателей, характеризующих динамические ряды, т. е. позволяющих производить сравнения изменений, происходящих во времени.

Если A и B представляют какие угодно связанные между собой события, то для характеристики их связи употребляются следующие три коэфициента: 1) коэфициент регрессии события B относительно события A, он равен $r_B = (B)_A - (B)_{\overline{A}}$, где $(B)_A$ означает вероятность наступления события B после осуществления события A, а $(B)_{\overline{A}}$ — вероятность наступления события B после осуществления отрицания $\overline{A}$ события A; 2) коэфициент корреляции обоих событий, равный $R = \pm\sqrt{r_A \cdot r_B}$ и обладающий тем же знаком, как и r_B; 3) коэфициент связи $Q = \frac{r_B}{1 - (B)_A (B)_{\overline{A}} - (\overline{B})_A (\overline{B})_{\overline{A}}}$. Знание этих коэфициентов дает исчерпывающую картину взаимоотношений между событиями A и B. Так, например, если Q близко к 1, то наступление одного из событий влечет за собой с большой вероятностью и наступление другого, а если еще $R \approx 1$, то эту зависимость следует с большой вероятностью считать обратимой.

Так же как и любой статистический метод, метод корреляции может дать ценные результаты при правильном его применении, т. е. при условии предварительного анализа вопроса средствами теории, соответствующей данному объекту. Но как и всякая

другая статистическая и не только статистическая теория он может быть использован лженаукой. Так, например, Мур с его помощью «открыл» причину экономических кризисов, приписав ее... восьмилетней периодичности взаимного расположения Солнца, Земли и Венеры! Сюда относятся и «теории устойчивости» статистических рядов, призванные обосновать незыблемость системы наемного рабства.

Чтобы установить, какое приблизительно количество элементов статистической совокупности, состоящей из N элементов, обладает данным признаком, пользуются выборочным методом. Его можно применять по-разному, но обязательно так, чтобы все элементы совокупности имели одинаковые шансы попасть в выборку. Наиболее прост случай, когда элементам совокупности соответствует N карточек, помещенных в урну и тщательно перемешанных, а выборка производится с обратным возвратом и перемешиванием перед каждым новым извлечением. Если при n извлечениях данный признак появится m раз, то во всей совокупности он будет встречаться M раз, причем M удовлетворяет неравенству

$$t_0\sqrt{\frac{M(N-M)}{n}}<N\frac{m}{n}-M<t_1\sqrt{\frac{M(N-M)}{n}}$$

с вероятностью w для достаточно больших значений n, равной

$$w=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_0}^{t_1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Наиболее совершенно техника выборки осуществляется специальной электрической машиной, производящей перфорирование карточек, их сортирование и табулирование.

Широкое применение статистики к самым различным областям знания, особенно развитие статистической физики, привело к тому, что теория вероятностей, на которой строится весь математический аппарат статистики, стала в конце XIX в. искать новых методов для решения своих новых, все более усложняющихся задач. В Англии был развит, в особенности Пирсоном, Боули и др., так называемый метод моментов, т. е. метод математических ожиданий n-х степеней статистических величин.

В России Чебышев, Ляпунов, Марков развивали метод математических ожиданий классическими алгебраическими средствами, используя цепные дроби, и получили много ценных результатов. Но благодаря слабости связей дореволюционной русской математики с западной математикой эти результаты стали известны мировой математической науке лишь в самые последние годы. Так, Марков с 1910 по 1919 г. изучал связан-

ные в цепь процессы, среди которых были такие, где вероятность результатов какого-либо испытания, после того как стали известными результаты двух предыдущих испытаний, становится независимой от результатов каждого из других предыдущих испытаний. Подобного рода зависимости установлены были Марковым при подсчете частот, с которыми встречаются гласные и согласные буквы в «Евгении Онегине». Однако только после того как конкретные физические проблемы вызвали потребность в этом новом направлении, оно стало основным направлением теории вероятностей на новейшем этапе ее развития. После непонятых работ Башелье (1900 г.) и Финетти на введение непрерывности в теорию вероятностей обратили внимание Гостинский, Адамар и Мизес (1931 г.), а в настоящее время изучение случайных функций разрабатывается виднейшими математиками. В частности, в работах Колмогорова построена аксиоматика, разработан необходимый аналитический аппарат и даны решения ряда основных проблем, относящихся к непрерывным случайным процессам. При этом важно отметить, что строгое обоснование новых схем, более правильно отражающих те или другие физические процессы, чем методы времен Лапласа и Чебышева, требует абстрактных теоретико-множественных приемов. Так, например, распределение вероятностей в функциональном пространстве фактически употребляется в физике, хотя некоторые консервативно настроенные математики, придерживающиеся лишь «классических» понятий, страшатся подобных абстракций. Здесь мы находим еще одно подтверждение того, что высшая ступень абстракции не только не удаляется от конкретной действительности, но и способна служить дальнейшему приближению к ней.

Развивая метод моментов, французская школа, например П. Леви, создала наиболее мощное средство—теорию характеристических функций, опираясь при этом, с одной стороны, на результаты, полученные Чебышевым и его школой, с другой стороны, на прием, введенный еще Коши, творцом теории функций комплексного переменного. Последний распространил понятие математического ожидания на комплексную область: если случайная величина x имеет распределение вероятностей $\varphi(x)$, то характеристической функцией называют математическое ожидание функции e^{itx}, которое равно интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}d\varphi(x).$$ Этот метод в теории вероятностей оказался столь же успешным, как и в теории чисел, при нахождении асимптотических выражений сложных теоретико-числовых функций, о чем мы уже упоминали в своем месте.

Необходимо отметить достижения советской математики в области теории вероятностей. Мы уже говорили о строгом теоретико-множественном обосновании теории вероятностей, данном Колмогоровым, о созданной им новой теории случайных процессов, охватывающей любой процесс, где состояние системы в данный момент определяет вероятность его состояния в любой последующий момент. В том же направлении применения методов теории функций к теории вероятностей идут и работы Слуцкого, Гливенко, Романовского. Бернштейном закон распределения Гаусса был распространен на ряды зависимых между собой величин. Хинчиным был разработан так называемый усиленный закон больших чисел, ранее только сформулированный итальянцем Кантелли. Хинчиным же был открыт «закон повторного логарифма», устанавливающий верхнюю границу отклонения суммы большого числа случайных величин от ее математического ожидания.

Мы не имеем здесь возможности подробно останавливаться на разносторонних применениях математической статистики. Однако необходимо все же упомянуть о страховом деле и так называемой «математической политэкономии», о статистической физике, о статистике в биологии и, наконец, о статистических методах в технике.

Широко разработана математическая теория страхования жизни. Она основывается на допущении, что какой-то коллектив состоит из лиц, обладающих одинаковым риском умереть. Для этого коллектива эмпирически устанавливается функция l количества живущих возраста x, и к ней применяется закон распределения Гаусса. Лучшей проверкой этой теории является исправность, с которой акционеры страховых обществ получают прибыли.

Что касается «математической политэкономии», то какую бы из многочисленных систем мы ни взяли—Курно, Маршалла, Джевонса, Менгера, Вальраса, Парето,—все они используют теорию вероятностей лишь для обоснования замены прерывных процессов непрерывными. Но так как они исходят при этом из различных антинаучных теорий экономического процесса, то вся их «математическая политэкономия» не представляет никакой ценности.

К проблемам физики, а именно к кинетической теории газов, статистика впервые была применена Даниилом Бернулли (1738 г.) для качественного объяснения закона Бойля. Ломоносовым этот закон был затем выведен и количественно на основании мысленного статистического эксперимента с механической моделью газа.

Газ, наполняющий кубический сосуд, представляется собранием хаотически движущихся частиц, сталкивающихся друг с другом и со стенками сосуда, результатом чего является давление. Беспорядочность движения обусловливает собой равномерность давления (закон Паскаля), ибо в среднем на каждую стенку приходится одинаковое количество ударов. При таком сжатии газа, когда все ребра куба сократятся в n раз, объем уменьшится в n^3 раз. Но зато площадь стенок уменьшится в n^2 раз, и длина пробега частицы от стенки к стенке сократится в n раз. Таким образом на единицу площади попадет в n раз больше частиц, чем прежде, а количество толчков, происходящих в n раз быстрее, увеличится в n раз, значит, общее число толчков увеличится в n^3 раз. Итак, уменьшение объема в n^3 раз сопровождается n^3-кратным увеличением давления — закон Бойля действительно соблюдается. При этом Ломоносов предвидел, что при больших давлениях, когда придется учитывать в общем объеме газа и собственный объем молекул, в закон Бойля нужно будет внести изменения, что было действительно сделано значительно позднее ван дер Ваальсом.

Более строгая разработка статистического метода была дана Клаузиусом применительно к статистическому распределению, устойчивому в пространстве, а затем Максвэллом к стохастическим процессам, устойчивым во времени. Максвэлл нашел закон распределения скоростей молекул, рассуждая следующим образом. Пусть $\varphi(x)\,dx$ обозначает вероятность того, что слагаемая x скорости v заключается между x и $x+dx$, и, аналогично, $\varphi(y)\,dy$, $\varphi(z)\,dz$ вероятности для слагаемых y и z. Предполагая (без доказательства) взаимную независимость этих вероятностей, мы получаем по правилу умножения вероятностей $\varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z)\,dxdydz$ как вероятность того, что скорость v находится в параллелипипеде x, y, z, $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$; но эта вероятность должна быть в то же время и функцией расстояния $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Отсюда мы получаем функциональное уравнение $\varphi(x)\,\varphi(y)\,\varphi(z)=(x^2+y^2+z^2)$, решение которого даст

$$\varphi(x)=e^{-k^2x^2},\quad f(x^2+y^2+z^2)=e^{-k^2(x^2+y^2+z^2)}.$$

Хотя, как показали Бертран и Борель, рассуждение Максвэлла не строго, оно все же приводит к правильным результатам, доказанным Больцманном, исходившим из столкновения молекул. Больцманну удалось вывести в виде статистической закономерности и второе начало термодинамики, а Гиббсу и Смолуховскому—окончательно завершить построение системы статистической механики. Подсчитанные теоретически Эйнштейном и Ланжевеном отклонения молекул броуновского движения от их средних положений были проверены экспериментально Перреном.

Созидание современной квантовой, а затем и волновой физики, начавшееся с открытия Планком (1900 г.) квантов действия, расширило область применения статистики в физике на внутриатомные явления. Это потребовало замены принципов классической статистики Максвэлла—Больцманна новым законом распределения вероятностей. Из двух конкурирующих гипотез—статистики Бозе—Эйнштейна и статистики Ферми—Дирака—опытные данные высказались в пользу второй. Этим самым еще раз провалились попытки построить физику на чисто статистической теории, ибо выбор теории статистики, необходимой для физики, не может быть сделан и обоснован без самой физики. Таким образом, изречение Эренфеста—«В настоящее время всякое исследование о структуре физической теории ведет неизбежно к вопросу о природе теоретико-вероятностных гипотез» — мы дополняем положением: «Всякое исследование природы вероятностных теорий, применяемых в физике, неизбежно должно привести к дальнейшему исследованию физической структуры данной системы». С этой точки зрения все попытки аксиоматизации физики, подобные работам Вейля и Неймана, оказываются несостоятельными.

В астрономии установлена некоторая неполная аналогия между распределением скоростей звезд и беспорядочным движением газовых молекул. Статистические методы дали и здесь прекрасные результаты.

В биологии, особенно в генетике (закон Менделя), статистика дала также интересные выводы, в частности полученные Бернштейном.

Широко, однако чаще всего сугубо некритически применяют статистические методы в психологии, особенно при исследовании одаренности.

За последние годы статистическими методами стали часто пользоваться и в инженерном деле. Сравнительно давно они употребляются в геолого-разведывательных изысканиях, при исследованиях лесных богатств и т. п. Статистика скученности применяется для решения задач, связанных с наилучшим обслуживанием абонентов телефона, устройством турникетов в метро и т. п., а также с организацией поточного производства (Фрай). В заводской практике статистическим путем (малой выборкой) определяются стандарт и брак массовых фабрикатов и т. п. (Фишер). Математическая статистика приспособляет свой метод для решения этих задач, так или иначе видоизменяя схемы, которые создала для нее теория вероятностей.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

Математика и философия. — Кризис оснований математики. — Логистика. — Формализм. — Конвенционализм. — Интуиционизм. — Эффективизм.—Эмпиризм.—Диалектический материализм и математика.

Естественно, что, как и всякая другая наука, математика имеет свою философию, являющуюся составной частью единой философии, единого философского мировоззрения.

Идеалисты считают философию наукой наук, законодательницей человеческого разума. На деле же она является выводом из конкретного знания, всеобщей методологией, обобщающей познания отдельных наук и лишь благодаря этому дающей, в свою очередь, те философские установки, которые они осознанно или неосознанно включают в себя. Отсюда следует, что задача философии математики состоит в том, чтобы изучить законы математики, ее границы и ее связь с другими науками, со всей человеческой практикой и знанием, провести грань между ее достоверными высказываниями и ее предположениями, выяснить сущность и особенности применяемого ею метода.

Как и другие науки, математика не является замкнутой системой, а представляет собой исторический процесс. И развитие математики, как всякое развитие, движется в противоречиях, в борьбе противоположностей. Таким образом, вопреки широко распространенному мнению, математика в целом не является непротиворечивой и абсолютно достоверной, и для философов представляется здесь широкое поле действия в поисках о б о с н о в а н и я м а т е м а т и к и.

Вопросы обоснования математики тесно связаны с проблемой основ естествознания в целом. Наиболее отчетливо выступает связь между проблемами обоснования геометрии и обоснования физики. Подход к решению этих задач меняется на разных исторических этапах; он определяется господствующими философскими воззрениями.

Древние египтяне создали сначала математику, и в первую очередь геометрию как практическую науку, как собрание вычислительных, эмпирически найденных предписаний, правил и формул. Лишь значительно позже они стали заниматься более отвлеченными вопросами и логической стороной математики. Оба эти направления—эмпирическое и логическое,—то сменяя друг друга, то вступая в борьбу между собой, были развиты дальше греками. В III в. до начала нашей эры, в период александрийского расцвета греческой культуры, была сделана попытка объединить эти направления, нашедшая наиболее завершенное выражение в «Началах» Эвклида, где из о ч е в и д н ы х аксиом л о г и ч е с к и выводятся теоремы. На протяжении всей дальнейшей истории математики, вплоть до конца XVII в., господствовала эта точка зрения. Затем ее вновь сменяют чередование и борьба эмпирического и логического направлений, принимавших при этом разные окраски и формы. Вехами на этом пути были три великих открытия: дифференциального и интегрального исчислений, неэвклидовых геометрий, теории множеств. Они показали: во-первых, что так называемая формальная логика т. е. логика, абстрагированная из отношений к о н е ч н ы х совокупностей твердых, н е и з м е н н ы х, не действующих друг на друга тел, недостаточна для математики (в дифференциальное и интегральное исчисления входят понятия переменной величины и бесконечности); во-вторых, что наглядное представление также не является ее надежным основанием (существование различных геометрий); в-третьих, что оба эти начала—логическое и наглядное—вступают иногда в противоречия (например, кривые без касательной) и что сама логика приводит к парадоксам (парадоксы теории множеств).

В зависимости от того или другого философского направления делались попытки найти выход—защищали то или другое начало или старались примирить их. При этом философы-идеалисты часто вносят теологические доводы в математику, или, как ядовито отмечает Блэк[1], «сам бог появляется, чтобы решить затруднения берклеанского идеализма, а в наше менее честолюбивое время граф Рессел взывает к аксиоме сведения!» Так, кантианцы и феноменологисты (например, Дриш или Гейгер) считают, что чистая наглядность существенна для пространственных образов. Как и теорию относительности, они отвергают и неэвклидовы геометрии. Наоборот, неопозитивисты Рейхенбах и Карнап, вслед за Махом и Ресселом, не признают наглядности даже за эвклидовой геометрией. Так же как и конвенционалисты (Пуанкаре), от которых они отличаются лишь в оттенках, неопозитивисты под наглядным представлением понимают не нечто, получаемое нами извне, а нечто, создаваемое нами же, и поэтому говорят о наглядном представлении пространства произвольной структуры. Особо стоят взгляды Маниа и Динглера, которые усматривают в математике активность, действие, волю, создающую действительность.

[1] M a x B l a c k, The Nature of Mathematics, 1933.

Не собираясь давать здесь обзор всех современных философских направлений под углом зрения их отношения к математике, мы ограничимся разбором семи главных течений, которые на сегодняшний день отчетливо выражены в самой философии математики.

Исходным пунктом при классификации этих течений не должно служить их понимание математического м е т о д а, хотя как раз такая точка зрения распространена наиболее широко. Основным отличительным признаком является их ответ на вопрос, что̀ составляет п р е д м е т математики, на вопрос об отношении математики к действительности. Исходя отсюда, ясно, что все существующие течения философии математики резко делятся на два лагеря—и д е а л и с т и ч е с к и й, к которому принадлежат: логистика, формализм, конвенционализм, интуиционизм, эффективизм и эмпиризм, и м а т е р и а л и с т и ч е с к и й.

Разногласия между этими течениями настолько глубоки, что поколеблен самый фундамент, на котором воздвигнуто стройное здание математики. С 1921 г., со времени, когда Вейль опубликовал работу «О новом кризисе оснований математики», ее кризисное состояние считается буржуазными математиками общепризнанным. Это кризисное состояние имеется там, где математику пытаются подчинить идеалистической, метафизической философии. Полагая, что существует только то, что существует в представлении, не замечая неустанного развития всех математических понятий, отражающих связи объективного мира, большинство математиков капиталистических стран из того обстоятельства, что в современной математике не имеется эффективного метода вычисления или построения всякого объекта, существование которого доказано, приходит к признанию кризиса в обосновании математики. Но, констатируя кризис обоснования математики в капиталистических странах, не ставим ли мы тем самым под удар всю математику в целом? Что это не так, лучше всего доказывает исторический опыт: не раз

математики—как Ферма, Эйлер, Гаусс—добивались крупных достижений на основе неверных, внутренне противоречивых предположений и посредством необоснованных методов.

Перейдем теперь к сжатому изложению отдельных течений.

Логистика утверждает, что математика—это ветвь логики. Логисты приходят к этому утверждению, исходя из, якобы, чисто логической природы математических предложений и доказательств. Будучи ветвью логики, математика является системой формальных тождеств, в которых не высказывается что-либо по существу. Ее высказывания—это не отображения действительности, а безусловные истины, которые не нуждаются в подкреплении опытом и не могут им быть опровергнуты. Наиболее ярко сформулированы эти взгляды в парадоксальном определении математики, данном Рёсселом: «Математика—это наука, в которой никогда не знают, ни о чем говорят, ни верно ли то, что говорят». Кутюра поясняет это так: «Действительно, не знают, о чем говорят, потому что содержание неопределенно, и не знают, верно ли то, что говорят, потому что истинность следствий зависит от истинности предположений, которая в свою очередь зависит от приписываемого им содержания».

Чтобы доказать правоту своего взгляда, логистика выработала особый метод, характерный для нее,—символическую запись логических понятий и заключений. Логисты намереваются доказать, что математика образует свои понятия не иначе, как чисто логически, что она строит свои доказательства только чисто логическими методами и что любая математическая теорема может быть выведена одними лишь методами логики из основных логических принципов. Поэтому они должны иметь в своем распоряжении средство, которое не давало бы возможности незаметно вкрасться в ход математического суждения каким-либо посторонним моментам, идущим от наглядного представления, от интуиции. Действительно, на протяжении всей истории математики наглядность всегда незримо витала даже над самым, казалось бы, отвлеченным и строго формальным математическим суждением, и не раз то или другое доказательство строилось на молчаливо допускаемых или попросту незамеченных, но взятых из наглядности положениях. Так, например, в «Началах» Эвклида доказываются самые, с первого взгляда, «очевидные» положения, вроде: «две различные прямые или совсем не пересекаются, или пересекаются только в одной точке». И здесь же, совсем непоследовательно, положение, что «две окружности, из которых каждая проходит через центр другой, пересекаются», повидимому, предполагается настолько очевидным, что оно не только не доказывается, но даже явно не высказывается, хотя постоянно применяется при построениях и доказательствах.

Логистический взгляд на математику и логистический символизм имеют довольно солидную историю, восходя к Лейбницу (1671 г.). В соответствии со своими философскими взглядами, со своим атомизмом, стремлением свести все к тождеству неразличимых Лейбниц мечтал о создании всеобщей символики, о механизации мышления, о построении мыслительной машины, которая автоматически производила бы над символами логические операции наподобие того, как изобретенная им счетная машина складывала, умножала, делила числа. Но лишь в конце XIX в., в период Дедекинда (1888 г.), Фреге (1893 г.), Пеано (1895 г.), логистическая символика была разработана настолько, что удалось дать логический анализ понятия числа и показать достаточность пяти аксиом для обоснования арифметики натуральных чисел. В дальнейшем Рессел (1903 г.), а затем вместе с ним Уайтхед (1910 г.) изложили логистику в объемистых трудах как законченную дисциплину. Но именно тогда в среде самих логистов начался некоторый самокритический пересмотр взглядов, как это видно по работам Вейля (1918 г.), перешедшего вскоре в лагерь противников, к интуиционистам, Хвистека (1923 г.) и в особенности Виттгенштейна (1922 г.).

Как уже сказано, орудием логистики служит ее символика, так называемое исчисление предложений. Оно учит, как чисто логическим путем выводить из одного предложения другое. Например, если истинно предложение «я сижу за столом и пишу», то истинно и предложение «я сижу за столом». Предложения обозначаются буквенными символами p, q, $r\ldots$, называемыми логическими переменными, а иногда и сложными символами, состоящими из переменных символов и логических постоянных. Последних насчитывается четыре. Их значение выясняется из следующего:

не-p, что означает: «предложение p не верно» и обозначается $\sim p$;

p или q, что означает: «или верно и p и q, или верно только p и неверно q, или верно только q и неверно p» и обозначается $p \vee q$;

p и q, что означает: «верно как p, так и q» и обозначается $p \,\&\, q$;

из p следует q, что означает: «неверно, что если p верно, то q неверно» и обозначается $p \supset q$.

Кроме того, если вводятся новые символы, то, чтобы показать, что их смысл дан определением, употребляют обозначение $= \{\ldots\}\ Df$. Так, например, символ эквивалентности $\equiv$ обозначает, что верно и $p \supset q$ и $q \supset p$; поэтому определение эквивалентности может быть написано так:

$$(p \equiv q) = \{(p \supset q) \,\&\, (q \supset p)\}\ Df.$$

Символ «следует» может быть также дан определением, и, значит, можно обойтись без него, а именно

$$(p \supset q) = \{ \sim p \vee q \}\ Df.$$

Вместо скобок, связывающих формулы воедино, иногда употребляют точки, как это видно на следующем примере: выражение $p \vee (q \vee (r\&(p \vee q)))$ может быть заменено выражением

$$p \cdot \vee :: q \cdot \vee : . r \cdot \& p \vee q : . ,$$

но читать формулы в таком начертании значительно труднее.

Понятно, что если записать символически любую тавтологию, то она останется истинной, какое бы конкретное значение мы ни придавали логическим переменным. Так, в тавтологии $(p\&(p \supset q)) \supset q$ символы p и q могут быть заменены любыми предложениями.

После того как введены эти основные символы, устанавливается система а к с и о м, т. е. тавтологий, которые принимаются без доказательства, и вычислительных правил, т. е. логических принципов, посредством которых из аксиом выводятся другие тавтологии. Аксиом имеется четыре:

1) $(p \vee p) \supset p$,
2) $q \supset (p \vee q)$,
3) $(p \vee q) \supset (q \vee p)$,
4) $(p \vee (q \vee r)) \supset (q \vee (p \vee r))$,

а правил два:

I. П р а в и л о п о д с т а н о в к и—любой символ, например p, может быть заменен в данной тавтологии, не нарушая ее, любым другим символом, но обязательно в каждом месте, где он встречается. Так, из тавтологии $p \vee \sim p$ (что означает: «или p верно, или p неверно») получим, заменив p символом $p \vee \sim p$ новую тавтологию

$$(p \vee \sim p) \vee \sim (p \vee \sim p).$$

II. П р а в и л о в ы в о д а (с и л л о г и з м а)—если доказано, что предложение B является тавтологией и что предложение $B \supset A$ является тавтологией, то предложение A также является тавтологией. Это записывают так:

$$\frac{B \qquad B \supset A}{A}.$$

Покажем теперь, как с помощью логической символики производятся те или другие доказательства.

Пусть, например, требуется доказать, что предложение

$$(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r)),$$

из которого вытекает принцип силлогизма, является тавтологией.

Из аксиомы 4, подставив $\sim p$ вместо p и $\sim q$ вместо q, получим, тавтологию

$$((\sim p) \vee \sim (q \vee r)) \supset ((\sim q) \vee (\sim p \vee r)),$$

а затем, используя приведенное выше определение символа «следует», получим

$$(p \supset q) = \{ \sim p \vee q \}\ Df \qquad (*),$$

откуда выведем тавтологию

$$(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r)) \qquad (a).$$

Далее из наших аксиом получим сначала тавтологию

$$(q \supset r) \supset ((\sim p \vee q) \supset (\sim p \vee r)),$$

а затем, используя снова определение (*), приходим к тавтологии

$$\underbrace{(q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))}_{B}. \qquad (b).$$

Наконец, подставив в (a) $q \supset r$ вместо p, $p \supset q$ вместо q и $p \supset r$ вместо r, получим тавтологию

$$\underbrace{((q \supset r) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)))}_{B} \supset$$
$$\underbrace{((p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r)))}_{A} \qquad (**).$$

Таким образом, так как, согласно (b), предложение B является тавтологией, а согласно (**), предложение $B \supset A$ также является тавтологией, то из правила II следует, что и предложение A, т. е.

$$(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r)),$$

также является тавтологией, что и требовалось доказать.

Таким путем из логистических аксиом может быть выведен ряд новых тавтологий, которые подобно формуле $p \vee (\sim p)$, названной «законом исключенного третьего» и гласящей, что «верно или p, или не-p», являются истинными по крайней мере для совокупностей с конечным количеством элементов.

Однако исчисление предложений не в состоянии охватить все логические высказывания. К такого рода предложениям, для

которых пришлось построить новое исчисление—и с ч и с л е н и е л о г и ч е с к и х ф у н к ц и й,, принадлежит, например, следующее: «если все A суть B и все B суть C, то и все A суть C», где логические формы выражений A, B, C не определены.

В основу этого нового исчисления положено понятие п р е д л о ж е н и я - ф у н к ц и и, т. е. выражение, которое содержит н е о п р е д е л е н н у ю составляющую и становится предложением, как только эту составляющую определяют. Например, выражение «x есть человек» является п р е д л о ж е н и е м - ф у н к ц и е й, которое можно обозначить φx. Оно становится предложением (истинным или ложным) в зависимости от значения аргумента x. Если хотят обозначить, что место аргумента свободно, то пишут $\varphi\hat{x}$, читая «φx—пустое».

В исчислении логических функций употребляют два вида к о л и ч е с т в е н н ы х о п е р а т о р о в: один для понятия «все», обозначаемый (x), что читается «все x», другой для понятия «существует», обозначаемый $\exists(x)$, что читается «существует по меньшей мере одно x». Если, например, $L(x)$ означает «кривая, проходящая через точку x», то $(x)\,L(x)$ будет означать «все точки x имеют кривую, проходящую через них», а символ $\exists(x)L(x)$ будет читаться «существует по меньшей мере одна точка x, через которую проходит кривая». Благодаря применению этих операторов, встречающиеся в функциях переменные становятся лишь кажущимися переменными.

Каждая логическая функция своим обозначением сама определяет, на какие формулы распространяются значения ее аргумента. Так, например, если $F(x, y)$ означает «x есть отец y», то выражение $(\exists x)\big((y)\,F(x, y)\big)$ означает «существует некто, являющийся отцом всех», а выражение $(y)\big((\exists x)\,F(x, y)\big)$ следует читать «у каждого имеется отец». Если выражение содержит несколько логических функций, то необходимо указывать, какова сфера действия оператора. Так, $(x)\,(\varphi x \supset \psi x)$ означает «из φx всегда следует ψx», между тем как $\big((x)\;\varphi x\big) \supset \psi x$ означает «если φx истинно для всех значений x, тогда истинно и ψx».

Исчисление логических функций в отличие от исчисления предложений нуждается в добавочных аксиомах и в известном расширении вычислительных правил.

В зависимости от того, к каким объектам применяются операторы, различают с у ж е н н о е и с ч и с л е н и е л о г и ч е с к и х ф у н к ц и й, где операторы применяются лишь к значениям аргументов функций, и э к с т е н с и в н о е и с ч и с л е н и е л о г и ч е с к и х ф у н к ц и й, где операторы применяются к самым логическим функциям.

Под э к с т е н с и е й или объемом логической функции $f x$ понимают множество или класс значений аргумента x, удовлетворяющих этой функции, обозначая экстенсию $\hat{x}(fx)$. Э к с т е н с и в н о й ф у н к ц и е й называют такую логическую функцию от логической функции, которая сохраняет свое з н а ч е н и е и с т и н н о с т и (т. е. она остается истинной, если была истиной, и остается ложью, если была ложью) для всех формально эквивалентных аргументов. Можно образовать и н е э к с т е н с и в н ы е ф у н к ц и и, как это показывает пример с функцией «φx имеет семь букв», одним из значений которой является предложение «$\hat{x}$—человек». Если заменить это предложение формально эквивалентным ему «$\hat{x}$—животное, производящее орудие», то значение истинности функции меняется, превращаясь из истины в ложь.

Чтобы избежать или обойти противоречие, возникающее в связи с определением т о ж д е с т в а математических функций, поскольку ведь две тождественные вещи это собственно не две вещи, а одна вещь, вводятся новые символы, называемые о п и с а н и я м и. Так, $(\iota x)\,(\varphi x)$ означает «то x, которое удовлетворяет φx», между тем как $\hat{x}\,(\varphi x)$ означает «те x, которые удовлетворяют φx» и, наконец, $a \in \hat{x}\,(\varphi x)$ означает «a есть одно из тех x, которые удовлетворяют φx».

Построив таким путем сначала исчисление предложений, затем логических функций и логических классов, логисты переходят к построению системы аксиом для натуральных чисел. Так, например, Пеано предложил следующую систему, состоящую из пяти аксиом:

1) $n \in \mathrm{Z}$, что читается: «нуль есть натуральное число» (n— означает нуль, Z—множество, элементы которого называются натуральными числами);

2) $(x)\;\big\{(x \in \mathrm{Z}) \supset (N'x \in \mathrm{Z})\big\}$, что читается: «если x натуральное число, то и следующий за ним элемент является натуральным числом» (здесь N' означает экстенсию следования);

3) $(x, y)\;\big\{\big|([x \in \mathrm{Z}]\;\&\;[y \in \mathrm{Z}])\;\&\;(N'x = N'y)\big| \supset (x = y)\big\}$, что читается: «если x и y являются натуральными числами и если следующий за x элемент тождествен с элементом, следующим за y, то тождественны также x и y» (здесь символ тождества $=$ дается посредством определения $(x = y) = (f)\,\big\{fx \supset fy\big\}\,Df$ и отличается от символа эквивалентности $\equiv$, который определяется так:

$$(f\hat{x} \equiv g\hat{x}) = \big\{(x)\,(fx \supset gx)\;\&\;(x)\,(gx \supset fx)\big\}\,Df;$$

4) $(x)\;\big\{(x \in \mathrm{Z}) \supset (N'x \neq n)\big\}$, что читается: «если x натуральное число, то следующий за ним элемент отличен от нуля» (при

этом символ различия $\neq$ определяется как логическое отрицание символа тождества $=$);

5) $(\alpha)\left\{[(n\in\alpha)\,\&\,(x)\left\{(x\in\alpha)\supset(N'x\in\alpha)\right\}\supset(\mathrm{Z}\subset\alpha)\right\}$, что читается: «если нуль является элементом множества α и если вместе с любым натуральным числом x также и следующий за x элемент является элементом множества α, то множество α содержит в себе множество натуральных чисел в качестве своего подмножества».

Таким образом, доказательство любой теоремы $T(n,\ Z,\ N)$, относящейся к натуральным числам, сводится к доказательству тавтологичности предложения:

$$(n,\ \mathrm{Z},\ N)\left\{[(1)\,\&\,(2)\,\&\,(3)\,\&\,(4)\,\&\,(5)]\supset T(n,\ \mathrm{Z},\ N)\right\},$$

где (1) & (2) & (3) & (4) & (5) означает логическое произведение приведенных только что аксиом.

Символика, которой мы здесь придерживались, не является общепризнанной. Каждый из логистов—Пеано, Падоа, Кутюра, Бурали-Форти, Рессел—употребляют свою собственную символику. Но, хотя Пуанкаре в своей работе «Наука и метод», ехидно замечает, что всех их объединяет то, что они менее неизвестное, ясное, пытаются объяснить посредством более неизвестного, темного,—сама попытка создания некоторой алгебры логики не означает еще ни отрыва от действительности, ни превращения ясного в темное. Лишь благодаря тому, что логисты пытались с в е с т и арифметику к логике, а логику понимали м е т а ф и з и ч е с к и, лишь благодаря их и д е а л и с т и ч е с к о й методологии работа логистов потерпела неудачу. Корни их позиции состоят, в конечном счете, в классовом характере математики. В период загнивания капитализма желание господствующего класса отвернуться от неприглядной действительности настолько сильно, что половинчатые взгляды Канта или Гербарта уже не в состоянии его удовлетворить.

Итак, логистика несостоятельна в самой своей основе, и ей не удается решить задачу, которую она себе поставила. Она не в состоянии справиться ни с «конечной проблемой»—формально-логически построить понятие целого числа, ни с «бесконечной проблемой»—логически обосновать непрерывность, континуум. Единственно, что ей удалось—и в этом несомненно ее заслуга,—это создание точной логической символики как важного орудия научного исследования и с ее помощью выявление логической структуры математических понятий и математических доказательств. Но в своем стремлении свести все математические теоремы к логическим аксиомам она оказалась бессильной.

На самом деле оказывается, что для доказательства многих математических теорем требуются две аксиомы—а к с и о м а б е с к о н е ч н о с т и и аксиома Цермело, которые приходится добавлять к исходным аксиомам,—аксиомы, которые далеко не всеми воспринимаются как «истины, не требующие доказательства».

Убедившись в тщетности доказать их, логисты нашли следующий выход из этого затруднения: они принимают сначала обе аксиомы в виде г и п о т е з, а затем делают отсюда грубо ошибочный вывод, будто благодаря гипотезам все теоремы математики становятся у с л о в н ы м и: «если верны эти аксиомы, тогда верна данная теорема», или символически $S: A\supset T$, где S означает систему понятий, включающую обе аксиомы, A—систему аксиом, кроме названных двух, T—доказываемую теорему, не подозревая, что задача заключается как раз в обратном—из правильности следствий заключить о законности допущенных гипотез.

Еще хуже обстоит дело с п а р а д о к с а м и. В четвертой главе, говоря о теории множеств, мы уже коснулись их, но вынуждены здесь еще раз вернуться к этому. По существу все логические и логико-математические парадоксы происходят из двух источников: одни—из противопоставления, одностороннего выпячивания единичного, части, прерывного материальной действительности, которая является единством прерывного и непрерывного, другие—из противопоставления, одностороннего выпячивания общего, целого, непрерывного этой же действительности. Вот почему невозможно, не впадая в противоречия, формально-логически обосновать понятие единицы как абсолютно изолированной и равной другим. Вот почему попытки построить формально-логическое обоснование понятия вещественного числа или геометрического континуума, включающих в себя не поддающиеся непосредственному наблюдению абстракции—связность и бесконечную делимость,—неизбежно приводят к противоречиям. Однако недостаточно констатировать эти противоречия, необходимо показать исторический генезис этих понятий, диалектически обосновать их—вот одна из важнейших задач, ожидающая своего решения.

Все логико-математические парадоксы можно разбить на две категории. К первой принадлежат те, которые связаны с неопределенностью терминологии, ко второй—те, которые могут быть записаны в точных логико-математических символах. Приведенный уже нами парадокс Ришара—Рессела относится к первой категории.

К ней же относится и парадокс Вейля, на котором, пожалуй, наиболее отчетливо виден терминологический характер этой категории парадоксов. Пусть имена прилагательные, обладаю-

щие тем же свойством, которое они выражают, будут названы «автологичными», а имена прилагательные, не обладающие тем же свойством, которое они выражают, «гетерологичными». Так, например, если мы условимся считать короткими слова, имеющие меньше чем 10 букв, то слово «короткий» окажется коротким словом, а значит, оно автологично, между тем как слово «длинный» гетерологично, так как оно не длинное. Как же обстоит дело со словом «гетерологичный»? Легко убедиться, что на этот вопрос не может быть дан непротиворечивый ответ.

Укажем еще на один парадокс, известный с древности, называемый «загадкой сфинкса», который приводит Гельдер[1]: мать умоляет сфинкса, похитившего ее ребенка, вернуть его ей. Сфинкс соглашается это сделать при условии, если мать отгадает, отдаст он ребенка или нет. Если мать скажет, что сфинкс не вернет ребенка, а сфинкс вернет его, то условие будет нарушено. Если же мать скажет, что сфинкс не вернет ребенка и сфинкс действительно не вернет его, то условие также будет нарушено. Если однако мать скажет, что сфинкс вернет ребенка, то сфинкс имеет возможность ребенка не вернуть, заявив, что мать не отгадала. Анализ парадокса может быть легко произведен символически. Пусть $\alpha = +1$ означает «мать скажет, что сфинкс вернет ребенка», а $\alpha = -1$ — «мать скажет, что сфинкс не вернет ребенка»; $\beta = +1$ означает «сфинкс вернет ребенка», $\beta = -1$ — «сфинкс не вернет ребенка». Таким образом, если мать отгадает правильно, α и β будут иметь одинаковые знаки; если же она отгадает неправильно, то их знаки будут разноименными, и, значит, в первом случае будет иметь место $\alpha\beta = +1$, во втором $\alpha\beta = -1$. Условие, поставленное сфинксом, можно тогда записать так: $\alpha\beta = \beta$, откуда, сокращая на β, мы получаем $\alpha = +1$, т. е. только если мать скажет, что сфинкс вернет ребенка, ей откроется возможность получить его обратно. Но и в этом случае возврат его ей не обеспечен, как это видно из следующего: подставляя $\alpha = +1$ обратно в уравнение $\alpha\beta = \beta$, получаем для определения β уравнение $\beta = \beta$, т. е. сфинкс имеет полную свободу поступать, как захочет.

Из парадоксов, принадлежащих ко второй категории, мы уже приводили парадокс Рессела о множестве всех множеств, которые не являются элементами самих себя. В логистической символике его можно выразить так: пусть w означает класс всех классов, которые не содержат самих себя. Тогда, каков бы ни был класс x, предложение $(x \in w)$ будет эквивалентно с предложением $(x \sim \in w)$, а значит, если мы придадим x значение w, то получим противоречие $(w \in w) \equiv (w \sim \in w)$. Парадокс Бурали-Форти о порядковых числах Кантора относится также к этой категории.

[1] O. H ö l d e r, Mathematische Methode, 1924.

Известно, что всякое вполне упорядоченное множество имеет порядковое число и что множество порядковых чисел, включая порядковое число ω_1, имеет порядковое число $\omega_1 + 1$. Если теперь представить множество в с е х порядковых чисел, то оно как вполне упорядоченное будет также иметь порядковое число, скажем, Ω. Однако из предыдущего предложения следует, что множество всех порядковых чисел, включающее Ω, должно иметь порядковое число $\Omega + 1 > \Omega$, а, значит, Ω не может являться порядковым числом в с е х порядковых чисел.

К какой бы категории ни относились парадоксы, их формальная сторона связана с неопределенностью сферы, на которую распространяется логическая переменная. Поэтому Рессел выдвинул принцип, согласно которому ни одна логическая функция не должна в качестве аргумента иметь самое себя. Развивая далее этот принцип, он разбил функции на и е р а р х и ю т и п о в так, чтобы к одному типу не принадлежали функции, которые служат аргументами других функций того же типа. Благодаря такому построению логики, словно из наверстанных друг на друга слоев, Рсселу действительно удалось избежать парадокса о множестве всех множеств, не содержащих самих себя, а также парадоксов, ему подобных. Но чтобы избавиться от парадокса Ришара—Рессела и других в этом роде, он был вынужден еще раз разбить свои типы н а п о р я д к и. Однако ни Рсселу, ни Рамзею и Хвистеку не удалось обосновать математику даже с помощью этих ухищрений. Они были вынуждены наряду с аксиомой бесконечности и аксиомой Цермело прибегнуть еще к также не сводящейся к логической тавтологии «аксиоме сведения», которая утверждает, что любые логические функции могут быть сведены к простейшим.

Так, определение верхней границы множества вещественных чисел, удовлетворяющих условиям сечения Дедекинда, противоречит принципу Рессела. Это определение основано на геометрической чувственной интуиции, и попытка Рессела заменить его другим формально-логически безупречным определением сама не безупречна, если только не допускать аксиому сведения. По существу аксиома бесконечности равносильна утверждению, что множество логических функций имеет мощность не меньшую мощности $\mathfrak{a}$ счетного множества, а из аксиомы сведения вытекает, что эта мощность не меньше, чем мощность континуума. Но даже при наличии аксиомы сведения возможно существование логических функций, которые не могут быть построены, в то время как отсутствие этой аксиомы привело бы к тому, что многие числа, различаемые в математике, логисты были бы вынуждены рассматривать как тождественные.

Таким образом можно сказать, что, несмотря на отмеченные заслуги, логистика не справилась со своей задачей. Не удалось

ей доказать, что математика лишь ветвь логики, ибо формальная логика недостаточна там, где приходится иметь дело с бесконечностью. Каждая попытка логистов обойти это затруднение всегда лишь в новом освещении обнаруживала всю его непреодолимость. Так, Вейль в 1919 г., когда он не был еще интуиционистом, построил вещественное число без аксиомы сведения. Однако его континуум коренным образом отличался от континуума Дедекинда, так как в континууме Вейля сечение, произведенное по способу, предложенному Дедекиндом, приводит не обязательно к вещественному числу, кроме того не всякое ограниченное множество вещественных чисел Вейля имеет верхнюю и нижнюю границы.

Виттгенштейн, который в своем «Tractatus Logico-Philosophicus» (1922 г.)—книге, являющейся библией венских махистов,—исходит из различия между высказыванием и показыванием, считает, что числа—это индексы символов, служащие лишь в качестве показателей. Вводя соответственно этому другую символику—вместо $\sim p$ он пишет Np, а вместо $\sim(\sim p)$ пишет $N'p$, далее $N''\ p$, и т. д.,—он определяет целые числа посредством операции $\{NN^x p = N^{x+1}\ p\}\ Df$ при начальном условии $\{N^0 p = p\} Df$. Однако такой подход слишком уже «просто» обходит основную трудность: принцип полной математической индукции здесь постулирован, а поэтому получается лишь видимость того, будто математику можно вывести из логики.

Близкое к логистике с внешней стороны течение—формализм—имеет различные оттенки. В одном виде он распространен среди современных математиков, а в другом—далеко проник в область естественных наук, в особенности теоретической физики, придав ей сугубо абстрактный характер. Философские корни формализма лежат в смеси объективного идеализма платоновского толка с махизмом, причем у некоторых ученых математический формализм переходит в прямую мистику. Сопоставим изречение Маха «науку можно рассматривать как проблему минимума, состоящую в возможно полном представлении фактов при возможно меньшей затрате мысли» с высказыванием Дирака: «единственным предметом теоретической физики является вычисление результатов, которые могут быть экспериментально проверены, причем совершенно излишне, чтобы было дано вполне удовлетворительное описание хода явления в целом», и сравним все это с основным положением венских учеников Гильберта, отказывающихся рассматривать математические предложения как содержательные, истинные высказывания и видящих в них лишь отношения между формулами, которые могут быть различно истолкованы. Тогда философская родословная формализма не вызовет никакого сомнения. В этом отно-

шении, по своим философским предпосылкам, формализм в известном смысле противоположен логистике, опирающейся на веру в абсолютность формальной и даже трансфинитной логики. Особое место занимает позиция основателя и главы формализма Гильберта, кантианца и эклектика в философии. Судя по его собственным заявлениям, вся работа Гильберта и заключается в том, чтобы, исходя из самой разрушительной критики позиций логистов (в стиле конвенционализма Пуанкаре), восстановить утерянный рай логистики в виде бессодержательной «игры символов». Однако в действительности Гильберт как математик отказывается не от содержания математики вообще, а от данного постоянного вещественного содержания, отводя ему место в «метаматематике» и оставляя за математикой изучение содержания отношений между переменными объектами. Таким образом, необходимо различать между реальным смыслом того, что естественники и математики делают, как ученые, и тем, что они сами, как буржуазные философы, об этом говорят.

Исходя из положения, что знанию доступна лишь структура наших восприятий, но отнюдь не их содержание, отрицая вообще всякий смысл вопроса о содержании знания (как это со своей точки зрения вполне последовательно делают Карнап и другие венские формалисты), формализм заявляет, что математика, так же как и логика, не имеет никакого предмета, что она представляет собой ряд гипотетических выводов из аксиом, которые не подлежат никакому определенному истолкованию. Смысл математики состоит, якобы, в том, что имеется возможность придать всей этой структурной системе то или другое произвольное истолкование. Таким образом, математика, а также и логика—это собрание некоторых исходных формул и известных операционных правил, с помощью которых можно выводить все новые и новые формулы.

Но если это так, то что гарантирует нам тогда, что аксиомы математики будут иметь какую-либо значимость, что они будут годны для вычислений воспринимаемых нами объектов? Гильберт, собственно создавший своими работами по обоснованию геометрии формалистическое течение, построил специальную, уже не беспредметную, а содержательную науку—«метаматематику». В ее задачу входит посредством арифметических методов доказать, что: 1) система формул математики (включая и логику) непротиворечива, т. е. что она не может привести к предложению вроде $0 = 1$; 2) формулы математики выводимы, т. е. что любая формула может быть или выведена из начальных аксиом, или по меньшей мере для каждой формулы может быть указано хотя бы одно значение логической переменной, для которого эта формула может быть выведена; 3) система

этих формул п о л н а, т. е. что всякую формулу можно или доказать или опровергнуть. Таким образом, если бы метаматематике удалось осуществить свою программу, была бы доказана ценность математики как некоей универсальной системы символов, не зависящей от их содержания и пригодной, благодаря множественности взаимосвязей этих символов, для изучения структуры всех возможных систем. Но даже в таком случае метаматематика не была бы способна объяснить, почему избрана именно данная система аксиом, так как изучение природы математических символов и границ их применения не входит в задачу метаматематики.

Однако, хотя для значительной части системы формул классической математики удалось провести программу, намеченную метаматематикой, все же в 1931 г. Гедель с помощью сложных выкладок, исходя из сорока с лишним определений, доказал положение, из которого вытекает, что всякое доказательство невозможности встретить противоречия в математике в целом, неизбежно само противоречиво. Математика и системы, подобные ей, не могут быть безостаточно формально символизированы, так как их множественность более сложна, чем множественность любой системы, которая должна выразить эту множественность к о н е ч н ы м количеством знаков.

Разница между формализмом и логистикой состоит в том, что если логистика стремится доказать, что математика является лишь частью логики, то для формализма эта задача отпадает, поскольку он, наоборот, рассматривает логику лишь как часть математики, отличную от последней тем, что логика нуждается в меньшем количестве аксиом. Вот почему вся программа обоснования математики, возлагаемая формалистами на метаматематику, относится тем самым и к логике.

Метаматематика построена для обоснования а к с и о м а т и ч е с к о г о м е т о д а. Все без исключения предложения математики должны, по требованиям этого метода, принадлежать к одному из двух классов A и T так, чтобы предложения класса T, называемые т е о р е м а м и, выводились из предложений класса A, называемых а к с и о м а м и, исключительно посредством формально-логических правил. При этом аксиомы рассматриваются, как уже сказано, не с точки зрения их содержания, истинности, а исключительно с точки зрения их положения в системе отношений, существующих между ними. И эту сеть отношений выражают средствами логического исчисления, аналогично тому, как мы это видели у логистов.

У Гильберта (1928 г.) мы встречаем знакомые нам символы и правила логистов, количество аксиом здесь значительно больше, но зато не требуется их взаимная независимость. Приведем эти аксиомы:

I. Аксиомы следования

$$1\cdot1\quad p\supset(q\supset p),$$

$$1\cdot2\quad \Big(p\supset(p\supset q)\Big)\supset(p\supset q),$$

$$1\cdot3\quad (p\supset q)\supset\Big((r\supset p)\supset(r\supset q)\Big);$$

здесь, например, последняя аксиома 1.3 читается: «если верно, что из p следует q, то верно, что из того, что из какого-то основания r следует p, следует и то, что из того же основания r следует q».

II. Аксиомы «и», «или»

$$2\cdot1\quad p\,\&\,q\supset p,$$

$$2\cdot2\quad p\,\&\,q\supset q,$$

$$2\cdot3\quad p\supset(q\supset p\,\&\,q),$$

$$2\cdot4\quad p\supset p\vee q,$$

$$2\cdot5\quad q\supset p\vee q,$$

$$2\cdot6\quad \Big((p\supset r)\,\&\,(q\supset r)\Big)\supset\Big((p\vee q)\supset r\Big);$$

здесь, например, аксиома 2.6 читается: «если верно как то, что из p следует r, так и то, что из q следует r, то верно, что r следует из p или q», или, иначе говоря, «если r следует как из p, так и из q, то для утверждения r достаточно знать, что из двух предложений p и q по меньшей мере одно истинно».

III. Аксиомы отрицания

$$3\cdot1\quad (p\supset q\,\&\sim q)\supset\sim p,$$

это так называемый «принцип сведения к абсурду»;

$$3\cdot2\quad \sim\sim p\supset p,$$

названная аксиомой «двойного отрицания».

IV. Аксиома существования

$$4\cdot1\quad A(x)\supset A(\in A),$$

была введена для того, чтобы избежать употребления количественных операторов «все» и «существует». Если $F(x)$ обозначает какую-либо логическую функцию и если существует какое-либо x, для которого $F(x)$ истинно, то $\in F$ изображает такое значение a переменной x, для которого $F(a)$ будет истинно.

Таким образом, вместо того чтобы писать, как логисты $(\exists x)\, Fx$, формалисты пишут $F(\in F)$, а вместо $(x)\, Fx$ мы находим у формалистов $F\ (\in \sim F)$.

V. Аксиомы равенства

$$5\cdot 1\quad (\mathrm{Z}a) \supset (a = a),$$

$$5\cdot 2\quad (\mathrm{Z}a\ \&\ \mathrm{Z}b) \supset ((a = b) \supset (A(a) \supset A(b))),$$

здесь $\mathrm{Z}a$ читается «a есть целое число», и, например, аксиома 5.2. читается: «если a и b целые числа, то отсюда следует, что если $a = b$, и если верно какое-то предложение A относительно a, то это же предложение A верно и относительно b».

VI. Аксиомы чисел

$$6\cdot 1\quad (\mathrm{Z}x) \supset (x' \neq 0),$$

$$2\cdot 2\quad (\mathrm{Z}a) \supset \Big[\Big\{A(0)\ \&\ (x)\Big(A(x) \supset A(x')\Big)\Big\} \supset A(a)\Big],$$

здесь мы встречаем знакомый нам уже принцип полной математической индукции.

Формалистическая система аксиом, обладая значительно большей конкретностью, чем логистическая, делает излишним различение разных типов переменных. Всякой переменной соответствует характеристическая функция, которая появляется везде, где встречается эта переменная. Так, например, если переменная f имеет своей областью те функции целых чисел, значениями которых являются целые числа, то ее характеристической функцией будет

$$(x)\,[\mathrm{Z}(x) \supset \mathrm{Z}(fx)]:$$

Теперь можно ввести какие угодно математические функции и операции, посредством прямого определения или посредством индукции. Так, 0, $0'$, $0''$ будут первичные числа; например, $\mathrm{Z}x \supset (fx = x)$ представляет определение fx, равной x для целых x; скажем, определение сложения целых чисел будет дано в виде:

$$(1)\ 0 + 0 = 0,$$
$$(2)\ 0 + 0' = 0',$$
$$(3)\ 0' + 0 = 0',$$
$$(4)\ (\mathrm{Z}x,\ \mathrm{Z}y) \supset \Big(x' + y = (x + y)''\Big),$$
$$(5)\ (\mathrm{Z}x,\ \mathrm{Z}y) \supset \Big(x + y' = (x + y)'\Big).$$

Особое место в этой системе символов занимает оператор $\in$. Он служит для получения трансфинитных математических функций, т. е. таких функций, значения которых хотя теоретически и определены, но могут быть получены лишь в исключительных случаях. Примером такой функции является целочисленная функция $f(n)$, которая равна или 0 или 1 в зависимости от того, рационально или иррационально $n^{\sqrt{n}}$. Далее, пусть f—целочисленная функция. Тогда символ $\in' f$ означает: если $f(x) = 0$ для всех x, то $\in' f = 0$, если же $f(x)$ не для всех x равно 0, то $\in'$ имеет значение наименьшего целого числа, для которого $f(x)$ отличатся от 0. Таким образом, $\in' f$ является трансфинитной функцией от f, так как в общем случае нельзя указать это наименьшее целое число. Вещественное число определяется посредством двоичных дробей, т. е. целочисленных функций $\varphi(x)$, принимающих значения 0 и 1. Ему соответствует следующая характеристическая формула:

$$(x)\,(\mathrm{Z}x,\ \mathrm{Z}y) \supset \Big((x)\,(\varphi x = 0 \vee \varphi x = 1)\ \&\ (x)\,(\exists y)\,(\varphi(x + y) = 1)\Big),$$

которую обозначают символом $R\varphi$. Отсюда можно определить и последовательность вещественных чисел как функцию $\varphi(x, y)$, с тем чтобы $\mathrm{Z}x$, $\mathrm{Z}y$ было истинно и выполнялось условие $(y)\, R\varphi(x, y)$. Так же можно определить и все функции действительной переменной. Однако совершенно ясно, что затруднение прячется здесь в трансфинитном операторе $\in$, в операторе существования. Мы не касаемся уже противоречий, вскрытых Геделем, о которых упомянуто выше. Формализм этим и отличается от логицизма, что он ставит своей задачей не преодолеть трудности, а лишь обойти их, ибо если для логистов формулы тавтологически истинны, то для формалистов они лишены смысла.

Чтобы дать некоторое представление о методах, применяемых метаматематикой, покажем, как производится доказательство выводимости математических и логических формул из начальных аксиом. Средством служат таблицы значимости, которые ставятся в соответствие с основными логическими отношениями. Так, если мы обозначим истинность или ложность предложений p и q или $+$, или $-$, то получим для предложения $p \supset q$ таблицу:

p	q	$p \supset q$
$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$

Если теперь мы захотим определить истинность или ложность предложения $p \supset \big((p \supset q) \supset q\big)$, то, применяя повторно только что составленную таблицу, получим:

p	q	$p \supset q$	$(p \supset q) \supset q$	$p \supset \big((p \supset q) \supset q\big)$
+	+	+	+	+
+	−	−	+	+
−	+	+	+	+
−	−	+	−	+

Отсюда видно, что предложение $p \supset \big((p \supset q) \supset q\big)$ всегда истинно, безразлично, истинны или ложны p и q. Аналогично тому, как истинность, доказывается и выводимость различных формул, содержащих логические переменные $\supset$ &, $\vee$, $\sim$. Однако в применении этого метода к трансфинитной операции $\in$ встречается существенная трудность. Гильберт вынужден прибегнуть к новой, трансфинитной аксиоме, которая гласит, что каждому предложению $\varphi(x)$ удовлетворяет какой-либо вполне определенный предмет $g\big(\varphi(x)\big)$, так что если предложение $\varphi\big(g(\varphi(x))\big)$, высказанное о нем, истинно, то и предложение $\varphi(x)$ всегда истинно. Но мы уже знаем, что предложения, подобные трансфинитной аксиоме, иногда приводят к парадоксам. Поэтому не следует думать, что когда-либо удастся доказать выводимость трансфинитной аксиомы в ее общем виде. Это возможно лишь для отдельных частных случаев, представляющих содержательные предложения о конечном количестве предметов. То обстоятельство, что для Гильберта трансфинитная аксиома является, так же как и все другие формулы, бессодержательной формулой, не устраняет указанную трудность, даже не позволяет обойти ее, а лишь загоняет ее вглубь.

Если логистика и формализм весьма близки друг к другу, то третье течение, конвенционализм, тоже родственное им, все же должно рассматриваться нами как в некотором роде переходное к течению, противостоящему им обоим,—к интуиционизму.

Отправной точкой для конвенционализма является критика логистики и формализма. Наиболее резко она выражена у Пуанкаре, которого можно считать основателем конвенционалистического течения. Благодаря его авторитету оно пользуется громадной симпатией среди значительной части математиков.

Конвенционализм сходится с логистикой и формализмом в том, что, как и они, он отрицает за математикой наличие предмета. Но в утверждении об исключительно логическом характере математических аксиом он не согласен с ними. Полная математическая индукция не может быть сведена к простой логической тавтологии, ибо она обладает синтетическим характером, целые числа не могут быть даны формально-логическими определениями. Математику нельзя отождествлять с логикой, при этом безразлично, какую из обеих наук считать по объему шире другой. Не уподобляясь ни логике, ни естественным наукам, математика представляется Пуанкаре как система непротиворечивых требований или соглашений и выводимых из них в неограниченном количестве следствий.

Конвенционалисты оспаривают как точку зрения тех, кто считает аксиомы индуктивными выводами из опыта, так и тех, кто считает их чистым творением духа. Конвенционализм не отрицает того, что в формировании математического знания неизбежно играют известную роль наблюдение и опыт. Вместе с тем он полагает, что человеческий дух обладает некоторыми первичными понятиями, например, по Пуанкаре, понятием группы. Они навязываются нам как формы рассудка и при этом так, что возможны различные толкования опыта. Из них мы выбираем такое, которое является наиболее удобным и наиболее простым. Таким образом, например, вопрос, какую из многочисленных геометрических систем нам следует избрать для описания явлений, определяет исключительно «экономия мышления».

Здесь обнаруживается двойственное нутро философии конвенционализма. Конвенционалисты Пуанкаре, Пикар и др., будучи физиками, математиками, фактически вынуждены считаться с существованием объективного материального мира, но в качестве сторонников прагматизма, позитивизма они отрицают его существование. Отсюда у них получается, что не наши понятия отражают действительность, а, наоборот, мы по свободному соглашению, по соображениям целесообразности и практичности выбираем понятия, которые затем отражает опыт. Пуанкаре прямо так и пишет: «В природе существуют замечательные тела, называемые твердыми, и опыт говорит нам, что связь различных возможных перемещений этих тел выражается со значительной степенью приближения теми же самыми соотношениями, как различные операции выбранной нами группы». Разве уже одно это не оправдывает полностью характеристику, которую Ленин дал Пуанкаре, прозвав его «крупным физиком и мелким философом»? Действительно, Пуанкаре, упорно и резко критиковавший логистов и формалистов, беспомощно и непоследовательно путался в кантианско-махистской философии. Его определение математики как «искусства давать одно и то же имя

различным вещам», как две капли воды, похоже на определение Рессела, согласно которому «математика—это совокупность выводов, могущих быть примененными к чему бы то ни было». Именно благодаря этому своему философскому оппортунизму конвенционализм, «философия удобства», оказался наиболее «удобным» для многочисленного слоя математиков, знакомых с философией лишь крайне поверхностно, именно поэтому он стал наиболее популярным течением современной буржуазной философии математики, даже до сих пор оказывающим кое-какое влияние на образ мышления некоторых из советских математиков.

Конвенционалистские мотивы сильны и у современных неомахистов—Рейхенбаха и Карнапа, которые, впрочем, в вопросе об основах математики охотно пользуются логистическими и формалистическими теориями. Некоторый оттенок разницы во взглядах Пуанкаре и Рейхенбаха состоит в том, что Рейхенбах не отрицает опытного происхождения математических, в частности геометрических, аксиом. Однако Рейхенбах считает, что они даны нам в неразрывной связи с физическими принципами, прежде всего с динамической силой. Разбиение наших ощущений, восприятий, представлений, понятий на геометрические и физические может быть осуществлено различными способами, и каждый из них произволен, условен, поскольку опытом дана лишь совокупность «геометрия & сила». В зависимости от принятого нами соглашения, руководствуясь пресловутой «экономией мышления», мы получаем ту или другую геометрию, но тогда нам приходится мириться с вполне определенной физикой. Наоборот, выбрав произвольно систему физики, мы вынуждены остановиться на определенной геометрии. Так, например, если мы остановимся на эвклидовой геометрии, то нам придется отказаться от привычной физики, если же мы захотим сохранить последнюю, то наша геометрия окажется неэвклидовой. Налицо, как видно, тесная связь с современной феноменологистической квантовой физикой, с ее принципом комплементарности Бора. Согласно ему, лишь произведение $p \,.\, q$ пространственно-временного вектора на импульс-энергия вектор поддается измерению, причем с известной, никогда не преодолимой неточностью. Поэтому и всякое произвольно точно выбранное измерение одной из этих величин p и q дает в обязательном порядке вторую величину с погрешностью, предписанной «отношением неточности».

Несостоятельность и непоследовательность конвенционализма совершенно очевидны. Он рассматривает объективную реальность чисто субъективистски как «внутреннюю гармонию мира», как то, что признается большинством людей или всеми. Он считает, что не природа навязывает нам понятия пространства и времени, а мы навязываем их природе, ибо мы находим их удобными.

Толкуя идеалистически отношение между объективной реальностью и нашим сознанием, конвенционализм обходит вопрос о предмете математики, заявляя, что математические аксиомы являются нашими требованиями или соглашениями. Он попросту умалчивает о существовании объектов, к которым относятся эти требования или соглашения, так как он не в состоянии сказать что-либо вразумительное о них. Между тем вряд ли кто-нибудь станет оспаривать, что соглашение можно заключить лишь о чем-то, а равным образом, что и требование можно предъявить лишь к чему-то. Может быть, речь идет о требованиях и соглашениях, относящихся к употреблению символов, и только? Но как раз это конвенционализм справедливо оспаривает. Поэтому единственная заслуга конвенционализма состоит в том, что он содействовал выяснению связи между аксиомами и определениями математики. Делая упор на возможности истолкования системы математических аксиом как системы непротиворечивых требований, конвенционализм не в состоянии объяснить, какие и почему существуют объекты, обладающие свойствами, выраженными в аксиомах. Единственно возможное научное объяснение состоит в том, что этими объектами являются процессы, тела, отношения материального мира. Форма требования или соглашения, свойственная аксиомам, отображает лишь, что в математических аксиомах эти материальные процессы встречаются в крайне абстрагированном, идеализированном виде. Одновременно конвенционализм правильно настаивает на том, что между аксиомами и выводимыми из них теоремами существует необходимая связь. Тем самым он идет вразрез с собственными принципами, которые требовали бы считать и характер этой связи лишь условным и подчиняющимся удобству. Но вопрос о самой природе этой необходимой связи конвенционализм опять-таки вынужден обходить молчанием.

Логистику и формализм объединяет взгляд на математику как на б е с п р е д м е т н у ю науку, игру символов, обладающую, подобно шахматной игре, н е и з м е н н ы м и, раз навсегда установленными правилами формально-логического мышления. В этом отношении оба эти направления примыкают к научному идеалу Платона, который считал, что «наука не содержит ничего чувственного. Математики говорят о числах, которые нельзя схватить иначе, чем мыслью, и с которыми нельзя обращаться никаким другим образом». Так же как в древней Элладе, и в современном капиталистическом классе сильна тенденция создать свою идеальную, вечную, далекую от всего «низменного», земного действительность. Что же касается метафизичности взглядов логистов и формалистов, то аналогичные воззрения высказывали и математики эпохи буржуазной революции, времен апогея механистического материализма. Декарт

считал, что логика и математика, в полном соответствии с неизменными универсальными законами вселенной, представляют собой некий априорный синтез. Насколько этот картезианский взгляд на математику определялся социально-экономическими концепциями его идеологов, видно из слов Монжа о том, что «общество должно руководствоваться теоремами логики, основанными на непреложных аксиомах». Без особого труда можно также показать, что сходство точки зрения Рессела и Уайтхеда с точкой зрения лейбницианцев на математику имеет свои глубокие мировоззренческие корни.

Конвенционализм половинчато, а интуиционизм решительно критикуют логистику и формализм. Но это критика справа, с позиций субъективного идеализма, с позиций реакционных.

Обвинения интуиционистов, выдвигаемые против логистики и формализма, справедливы. Они прежде всего бьют по утверждению о беспредметности математики. Пуанкаре писал об этом так: «Разве мог бы думать естествоиспытатель, которому приходилось исследовать слона только в микроскоп, что он достаточно хорошо знает это животное? То же и в математике. Логик, разложивший каждое доказательство на ряд элементарных операций, еще не обладает всею реальностью, от него совершенно ускользает что-то нам неизвестное, что сообщает единство доказательству. Нечего удивляться работе каменщика в зданиях, возводимых нашими учителями, когда мы не можем понять плана архитектора. Вот этого общего взгляда на целое логика не может нам дать—его нужно искать у интуиции».

Таким образом, с точки зрения конвенционализма, а тем более интуиционизма, математика не сводится к логике, поскольку главное в математике—это не ее метод, а результаты ее, для нахождения которых нужно нечто внелогическое. Пуанкаре прибегает к сравнению с магазином, в котором имеются математические предметы: чтобы купить все, нам нехватит ни аппетита, ни денег. Мы можем сделать свободный выбор и остановиться на том или другом товаре, но наличный ассортимент не зависит при этом от средств покупателей. Это сравнение в защиту конвенционалистских и интуиционистских идей выбрано, впрочем, довольно неудачно. Не только заправский экономист, но и всякий поймет, что, выбирая товар, покупатели действуют далеко не «свободно».

Более конкретно осветил роль поисков, выбора в математике Борель, указав, что можно составить бесконечно объемистый каталог формул, вроде:

$$(x+1)(x-1)=x^2-1, \quad (x+1)^2=x^2+2x+1,$$
$$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1,$$

и т. д., но лишь некоторые из них будут иметь значение и представлять интерес. Если, например, за номером 35427 мы найдем в нашем каталоге формулу $aP^3+bQ^2+cR^5=0$, где a, b, c—постоянные и где P, Q, R—определенные многочлены 20-го, 30-го и 12-го порядков, то ничто не скажет нам, почему именно эта формула, а не формулы за соседними номерами 35426 или 35428 имеют такое важное значение в теории уравнений 5-й степени. Открывший эту формулу Клейн пришел к ней, конечно, не от логических упражнений, а вывел ее на основании изучения существенных свойств математических отношений. То же относится, кстати, и к самой области обоснования математики, где опять-таки выбор тех или других аксиом вовсе не произволен.

Если даны предложения A и $A \supset B$, то отсюда вытекает и B, которое содержит всегда лишь то, что содержалось уже в посылках. Но в случае научного открытия, все равно в математике или в логике, дано B и требуется найти A и $A \supset B$, т. е. необходим некоторый синтез, для осуществления которого формальная логика оказывается недостаточной.

Считая математику беспредметной наукой, логисты и формалисты полагают, что числа, функции, множества и т. д. существуют постольку, поскольку они логически постулируются нами как некоторая бесконечная система объектов, удовлетворяющая известным аксиомам. Это неизменные вещи (Dinge), а не предметы (Gegenstände) нашего исследования, они целиком в своей неизменности и в своих неизменных совокупностях принадлежат реальности. Так, определяя, по Дедекинду, вещественное число как сечение в области всех рациональных чисел, рассуждают о совокупности всех рациональных чисел как о чем-то, заранее данном и готовом. Но нам известно, что материальная действительность не знает неизменных вещей и неизменных совокупностей, а только вечно изменяющиеся, вечно движущиеся процессы. Поэтому неудивительно, что, защищая свою точку зрения на математику, логистика и формализм приходят к противоречиям, к парадоксам, которые вызывают обоснованные протесты.

Противники беспредметной математики подвергают обстрелу приведенный только что взгляд на математическое существование, так называемый экзистенционализм. Сначала они пытаются ограничить область математического существования. Одни не допускают существования трансфинитных чисел третьего класса, другие идут дальше и отрицают существование трансфинитных чисел второго класса, признавая лишь вещественные числа, непрерывные и другие «разумные» функции. Наконец, интуционист Вейль отрицает существование верхнего предела числовой последовательности, далее, целых чисел, обладающих некоторыми свойствами, невыразимыми в закон-

ченном виде, непрерывного континуума, неизмеримых множеств.

Вместо непоследовательного, зависящего от симпатий данного математика, большего или меньшего ограничения области математического существования интуиционизм выдвигает новое его определение: существуют лишь те математические объекты, которые могут быть п о с т р о е н ы, исходя из ряда натуральных чисел. Всякая последовательность мыслится как незаконченная, с т а н о в я щ а я с я. Натуральный ряд чисел никогда не дан полностью в д е й с т в и т е л ь н о с т и, а только в в о з м о ж н о с т и все дальнейшего и дальнейшего его построения: он—последовательность, порождаемая благодаря принципу полной математической индукции. Континуум рассматривается Брауэром как совокупность бесконечных последовательностей натуральных чисел, т. е. как «среда свободного становления», в которой развертываются становящиеся последовательности. Вещественные числа получаются не как сечения, а посредством операции вложения (Einschachtelung) интервалов друг в друга. Она создает бесконечную последовательность никогда не вырождающихся в точку, неограниченно суживающихся интервалов, и именно эта последовательность определяется как вещественное число. Так, рациональные числа в интервале от 0 до 1 можно написать в следующем порядке:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ \ldots$$

и осуществить затем операцию вложения, приводя в соответствие с каждым из них признаки «левый (л)» и «правый (п)», однако делая это так, чтобы не нарушать порядка их следования по возрастающим значениям. Тогда получим, например, ряд

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ \ldots$$
л, п, л, л, п, л, п, л, л,...

Если мы спросим теперь, какой признак получит число $\frac{4}{5}$, то ответ будет однозначен: п, между тем как вопрос о признаке числа $\frac{3}{5}$ не имеет смысла, поскольку это зависит целиком от нашего свободного выбора. Также и всякое множество определяется не как совокупность его элементов, а как з а к о н их построения, актуальная бесконечность сменяется здесь потенциальной, вместо теоретического описания выдвигается требование конструктивного творчества.

Но какой бы заманчиво материалистической ни казалась у интуиционистов «предметность» математики, каким бы диалектическим ни представлялось их «становление» и «построение»—под

всеми этими фокусами скрываются лишь идеалистические и метафизические понятия. Глава голландской школы Брауэр, а с ним и все интуиционисты считают, что математика не возникает из человеческой практики, не выражает связей материальной действительности, явления которой причинно обусловлены. Математические суждения не зависят от опыта и не доказуемы аналитически; они синтетичны и априорны. Если логисты и формалисты на вопрос, где существует математическая точность, отвечают: «на бумаге», то интуиционистский ответ гласит: «в человеческом интеллекте». Таким образом, вместо сомнений и колебаний Пуанкаре, который не был в состоянии выбраться из дилеммы: если математика дедуктивна лишь по видимости, то откуда берется ее совершенная строгость, если же она часть формальной логики, то почему она не сводится к одной грандиозной тавтологии?—интуиционисты дают недвусмысленный идеалистический ответ. Недаром Брауэр является неокантианцем, сохранившим взгляды Канта на время как на чистую априорную интуицию и ревизовавшим лишь кантовское учение о пространстве. Интуиция понимается им не как чувственное или эмпирическое созерцание, а как род «непосредственной достоверности». Бутру «объясняет» ее так: «Математические истины не представляют собою ни следствий, ни экспериментальных фактов, ни результатов логических построений или дедукций: они предполагают, таким образом, тот способ трактовки, который не совпадает ни с чувственным опытом, ни с разумом. Когда мы стараемся его изолировать, удается отметить некоторые из его черт, но в общем и целом мы все же должны признать, что он остается таинственным».

В основе интуиции лежит так называемая «первичная интуиция» (Urintuition). «Математику считают наряду с наукой и языком одной из важнейших а к т и в н о с т е й человека, возникающей из двух форм деятельности жизненной воли, а именно из «математического рассмотрения» и из «математической абстракции». Математическое рассмотрение проявляется в двух активных установках: в «временной» и «причинной». Временная установка состоит в расщеплении момента жизни на два различных образования, переживаемые нами как одно уступающее другому, однако сохраняемые в акте воспоминания, причем одновременно от «я» отделяется «мир». Созданная временной установкой в виде сначала двучленной временной последовательности явлений временная двоица в дальнейшем может сама выступать как один из членов новой двоицы, откуда и приходим к «временной последовательности явлений произвольной множественности». Тогда проявляет себя причинная установка в виде волевого акта «отождествления различных временных последовательностей явлений», причем возникает некий суб-

страт отождествленных последовательностей—причинная последовательность. Из всего этого «математического рассмотрения» вытекает «математическое действование», благодаря которому человеку удается путем вычисления добиться желаемого, и надежным средством служит для этого «математическая абстракция», освобождающая упомянутую двоицу от ее содержания. Так мы приходим к пустой форме как субстрату всех двоиц, и она как раз и образует первоинтуицию математики. С помощью первоинтуиции построениями, подобными тем, которые привели к созданию двоицы, создают и натуральные числа—основу всех математических образований».

Этого, с позволения сказать, вразумительного изложения главной интуиционистской идеи, данного Дубиславом, пожалуй достаточно, чтобы представить себе, сколько мистики приходится напускать интуиционистам для затуманивания вопроса о материальном происхождении и о материальной сущности натурального числа и всей математики. Вполне последовательно интуиционисты приходят к боженьке. «Простое допущение внешнего мира,—пишет Вейль,—не объясняет собственно ничего из того, что оно тем не менее должно было объяснить, но вопрос о его реальности неразрывно связывается с вопросом об основании закономерно-математической гармонии мира. Таким образом, последний ответ лежит все же по ту сторону знания—только в боге». Такого же мнения придерживался и предшественник интуиционистов Кронекер, стремившийся, как и они, к ограничению области математики и считавший, что целые числа—это единственный объект математики и что их «создал сам добрый бог».

Не менее плачевно обстоит дело и с «становлением» и с «построением», со всей генетической установкой интуиционистов. «Становление» метафизически противопоставляется всякой закономерности. Потенциальная бесконечность интуиционистов—это «дурная бесконечность», а не истинная бесконечность. Понятая, хоть и идеалистически, еще Гегелем, материалистически истолкованная Энгельсом, эта бесконечность представляет собой синтез конечного и бесконечного, закона со становящимся содержанием. Интуиционистское «построение» в конечном счете представляет собой агностический отказ от принципиальной возможности получить решение любой задачи.

С вопросом «построения» тесно связан и вопрос о «законе исключенного третьего», применимость которого в математике в целом интуиционисты справедливо отрицают. На самом деле, можно ли закон формальной логики «предложение или истинно, или ложно» применять в математике? Повидимому, это допустимо лишь в тех случаях когда будет доказано, что два предложения исключают друг друга именно так, что никакое третье невозможно, но установить это может лишь содержательное, а отнюдь не одно формальное изучение этих предложений. Если, например, рассматривают последовательность простых чисел $p > 2$, то можно, конечно, установить некоторые общие закономерности, указав, скажем, что все p будут нечетными. Однако, так как эта последовательность не дана нам как целое, так как при настоящем состоянии науки неизвестен закон образования ее элементов, отдельные общие высказывания о них невозможны. Утверждение, что то или другое предложение, относящееся к этим числам или истинно, или ложно, зачастую не имеет никакого смысла.

Более того, как мы уже знаем, V постулат Эвклида нельзя доказать. Его можно даже заменить другим, ему противоположным. И все же мы не придем к противоречию, если будем исходить из того, что он верен. Таким образом, можно допустить, что он является предложением, которое ни истинно, ни ложно. Это происходит потому, что в общем случае истинность предложения p не тождественна с ложностью его противоположности. Если, например, предложение p гласит: «существует простое число вида x^4+1», а противоположное предложение $\sim p$—«не существует простое число вида x^4+1», то интуиционизм утверждает, что ни p, ни $\sim p$ не имеют смысла, пока не построено либо число, удовлетворяющее p, либо число, удовлетворяющее $\sim p$. Если же мы имеем предложение q—«существует простое число вида x^4+1, которое меньше 18»,—то, поскольку таким числом является 17, решается вопрос об истинности q и ложности $\sim q$.

Конечно, интуиционисты по-своему обосновывают отрицание закона исключенного третьего; они исходят из своего понимания математического существования как осуществления того, что заранее дано в человеческом мышлении. Во всяком случае отсюда становится понятным, почему интуиционизм требует реконструкции не только математики, но и логики в тех ее частях, где дело идет о фактическом построении математических образований.

В отличие от интуиционистов математики, стоящие на позициях диалектического материализма, не могут удовлетвориться констатированием несостоятельности «принципа исключенного третьего». Они не могут согласиться с требованием выбросить за борт математики все то, что не может быть в настоящее время эффективно вычислено или построено, не могут принять на веру применимость законов формальной логики к натуральному ряду, а должны ставить во всех случаях вопрос о формулировке определенных условий, уточнении определений, нахождении доказательств применительно к каждой конкретной области математических объектов. Ибо

диалектическая логика, логика «и да и нет», стоит выше метафизической логики, логики «или да, или нет» не потому, что она не признает альтернатив, а потому, что она учит искать конкретные условия, для которых однозначные ответы «да» или «нет» научно обоснованы.

Интуиционистская логика может быть материалистически истолкована как логика решения задач. Такая логика была построена Гейтингом (1930 г.). Хотя интуиционисты и считают символику лишь средством, а не предметом изучения, однако они все же противопоставляют ее обычной логике предложений, между тем, как показал Колмогоров (1932 г.), обе эти логики не противоречат, а дополняют друг друга, имея свое поле действия в разных областях исследования. Основные четыре символа логики сохраняются, однако меняется их содержание. Так, например, $\sim p$ обозначает «p невозможно» вместо прежнего «не-p». Для этого символа даются два определения:

1. $\sim p \supset (p \supset q)$, что означает «из того, что p невозможно, следует, что из p следует q», или, иначе, «из противоречия следует все, что угодно».

2. $[(p \supset q) \,\&\, (p \supset \sim q)] \supset \sim p$, что означает «если из p следует q и если из p следует, что q невозможно, то отсюда следует, что p невозможно», или, иначе, «если из p следует противоречие, то p невозможно».

Вместо формулы «$p \vee \sim p$», которую интуиционисты не признают, они пользуются «теоремой об абсурдности абсурдности закона исключенного третьего», которая пишется так $\sim\sim(p \vee \sim p)$. В интуиционистской логике употребляют три различных знака равенства: 1) $p \equiv q$, что означает, что p тот же самый объект, что и q; 2) $p \mathrel{\dot{=}} q$, что означает математическое тождество; 3) $p = q$, что означает математическое равенство. Далее имеется ряд символов для логических функций, например: $\binom{p}{x}\, a$, что означает выражение, получаемое из a, если x, где бы оно в a ни встречалось, заменяется через p; далее, ε—для существования, N—для натурального числа и т. д. Между двумя множествами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ здесь могут существовать четыре вида взаимоотношений:

1) если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ не могут быть отождествлены, они—р а з л и ч н ы;

2) $\mathfrak{M}$ в ы д в и г а е т с я (herausragt) из $\mathfrak{N}$, если $\mathfrak{M}$ имеет хотя бы один элемент, отличный от всех элементов $\mathfrak{N}$;

3) $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ к о н г р у е н т н ы, если ни $\mathfrak{M}$, ни $\mathfrak{N}$ не выдвигается одно из другого;

4) $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ ч у ж д ы (elementenfremd), если они различны и если ни один элемент не тождествен.

Отсюда вытекает, что между вещественными числами кроме отношений, данных знаками $>$, $=$, $<$, в интуиционистской математике имеется еще одна, четвертая, возможность соотношений.

Если логистика, формализм, а в значительной степени и конвенционализм являются теми направлениями философского идеализма в математике, которые вместе с «кризисом роста» буржуазного естествознания конца XIX и начала XX в. обусловлены империалистической стадией капитализма во время сравнительно «мирного» развития капитализма, то интуиционизм со своим глубоким пессимизмом и даже известным злорадством над кризисом основ математики, со своей туманной мистикой является порождением современного этапа загнивания капитализма и характерен для деградации буржуазной науки. Это направление в математике полностью соответствует «витализму» и «холизму» в биологии и в естествознании вообще, «Gestaltpsychologie» в психологии, «социологической школе» в общественных науках, «иррационализму» и «активизму» в философии. Оно же поставляет удобнейший материал для «научного» обоснования мировоззрения фашистских громил.

При этом, хотя и Рессел и Гильберт подвергаются беспощадной критике интуиционистов, сами они отчасти находятся под их влиянием, ибо, как многие буржуазные мыслители, они непрочь эклектически позаимствовать кое-что из интуиционистского идейного арсенала. Так, Рессел, со своих позиций критикуя интуицию, пишет, что она «есть лишь особенно развитая сторона инстинкта и, как всякий инстинкт, достойна удивления в обычной среде, в которой развивались привычки соответствующего животного; ее полная недостаточность однако обнаруживается сейчас же, как только среда меняется таким образом, что индивидуум вынуждается к самостоятельному действию»,—и все же, сам не замечая того, он переходит в дальнейшем, в вопросе о путях математического исследования, на точку зрения интуиционистов. Что касается Гильберта, то он считает, что математика занимается сверхлогическими конкретными объектами, данными непосредственно наглядно в созерцании (интуиции). Любопытно привести мнение Эйнштейна—классический образчик эклектики,—его ответ на вопрос об отношении между геометрией и опытом[1]: «Могу так подытожить свой взгляд на данный предмет: с исторической точки зрения геометрия, несомненно, физическая наука. Именно, она занимается вопросом, как тела, практически твердые, могут быть расположены в состоянии относительного покоя. Но можно изобразить гео-

[1] Приведен в книжке J. P e l s e n e e r, Esquisse du progrès de la pensée mathématique, 1935.

метрию еще и так, чтобы рассматривать чисто логические отношения между ее фундаментальными понятиями, независимо от их отношений к физическому опыту. Если поступить так, то речь пойдет о чисто логическом математическом содержании. Возможно также еще и третье понимание, когда не рассматривают геометрию самое по себе как физическую науку, а как составную часть таковой. Тогда устанавливают соотношение не между одной геометрией, а геометрией в совокупности с другой наукой (например, с классической физикой системы материальных точек) и между опытными фактами. Все эти понимания возможны, причем нет нужды заявлять, что только о д н о из них единственно допустимо. Надо лишь потребовать, чтобы имелась ясность, какую точку зрения мы намерены занять в каждом отдельном случае».

К направлению интуиционизма как известная непоследовательная разновидность его примыкает э ф ф е к т и в и з м. Исторически эффективизм предшествует интуиционизму. Он зародился, когда аксиома свободного выбора Цермело и вытекающая из нее теорема о возможности полного упорядочения любого множества подверглись критике Бореля. В связи с этим в 1905 г. в парижской математической школе между Адамаром, Бером, Лебегом и Борелем произошла полемика, зафиксированная в «Пяти письмах о теории множеств», полемика, которая подняла вопрос об эффективности математических операций.

Напомним сначала содержание аксиомы Цермело. Она утверждает, что если для всех элементов множества $\mathfrak{M}$ установлено, обладают ли они данным свойством a или нет, тогда в множестве $\mathfrak{M}$ можно выбрать подмножество $\mathfrak{A}$, содержащее все элементы, обладающие свойством a, и только эти элементы. В первом письме Адамар признает, что Цермело действительно не дает метода для эффективного осуществления операции свободного выбора и что остается сомнительным, удастся ли когда-либо кому-нибудь указать такой метод. Тут же он замечает, что задача дать функцию эффективно разнится от задачи доказать ее существование настолько же, насколько сильна разница между описанием и определением. Во втором письме Бер протестует против «сознательного или бессознательного отождествления множества, в том числе и счетного множества, с мешком, наполненным знаками, который может быть передаваем из рук в руки», и считает неверным, когда рассматривают подмножество $\mathfrak{A}$ данного множества $\mathfrak{M}$ как данное. В третьем письме Лебег поддерживает Бореля и Бера, заявляя, что существование какого-либо математического объекта следует считать доказанным лишь тогда, когда он дан определением, т. е. когда дано свойство, характеризующее этот объект. В четвертом письме Адамар формулирует спорный вопрос так: «Можно ли доказать существование

математического объекта, не давая его определения?» и добавляет: «Я отвечаю—да!». При этом он показывает, что отрицательный ответ влечет за собой отказ от трансфинитных чисел Кантора, начиная с $\aleph_1$ и выше. В пятом, заключительном, письме Борель принимает это следствие и заявляет, что теория Кантора—это лишь вспомогательная аналогия, не имеющая точного значения и играющая, примерно, такую же роль, какую играют некоторые вспомогательные теории в математической физике (например, геометрическая оптика).

Из аксиомы Цермело вытекает также теорема ван Флека о существовании неизмеримых множеств. Однако до сих пор не удалось построить ни одного примера неизмеримого множества. Больше того, если отказаться от аксиомы свободного выбора, придется, как показал Серпинский, пересмотреть такие основные понятия анализа, как понятие непрерывности функции и т. д. Таким образом, эффективизм в конечном счете приходит к интуиционизму, не высказывая однако до конца и с полной отчетливостью, что в его основе лежит субъективно-идеалистическое понимание математического существования, как существования в нашем сознании. Именно эта половинчатость, подобно тому как и непоследовательность конвенционализма, обеспечивает эффективистам парижской школы сторонников среди некоторых польских, итальянских и даже... советских математиков.

Прежде чем перейти от идеалистических направлений в философии математики к материализму, остановимся еще на математическом э м п и р и з м е. С точки зрения эмпиризма объектом математики являются абстрактные представления, имеющие происхождение из о п ы т а. В зависимости от того, понимается ли опыт как воздействие объективного мира на наши органы чувств или как содержание нашего сознания, оторванное от внешнего мира,—эмпиризм приводит или к материализму, или к идеализму.

Отправной точкой для создания эмпирической математики служит установление расхождения между теоретической (точной) и практической (приближенной) математикой. Это расхождение с особой силой подчеркивает, например, Клейн, являющийся, несмотря на свой эклектизм, непоследовательным материалистом. Еще в 1882 г. Паш дал первые наброски новой эмпирической математики, которая затем начиная с 1916 г. была разработана в последовательную систему датским математиком Хьельмслефом под названием «геометрии действительности» или «естественной геометрии». Основным элементом этой геометрии является плоскость, о которой здесь говорится следующее: «Что такое действительная плоскость? На этот вопрос можно ответить, если посмотреть, как на практике, на машино-

строительных заводах, изготовляют плоскости. При этом употребляют так называемую контрольную плиту, нормальную плоскость, по образцу которой путем подходящей обработки отделывают изготовленные плоские поверхности. Как однако получают такие контрольные плиты? Их изготовляют всегда по три. Берут три железные плиты, представляющие приближенно плоские поверхности; потом обрабатывают их постепенно путем шабровки так долго, пока каждая из них точно не подходит к каждой из остальных двух». Отсюда, этим же путем, получается прямая, точка, вся геометрия.

В новейшее время возрождение этих идей мы встречаем у фашистских математиков: у Маниà в Италии, у Динглера в Германии. Маниà[1] считает, что «обыкновенная геометрия не является описанием физической реальности, потому что ее точки, ее прямые и ее плоскости не существуют в природе». Отсюда следует, что эта геометрия, «хотя логически и строга, является совершенно бесполезной для тех целей, которые ставит себе математика», почему и необходимо обратиться к естественной геометрии Хьельмслефа. В этой геометрии две пересекающиеся прямые имеют вместо одной точки общим целый отрезок, и через две точки проходит не только одна прямая. Две точки могут здесь не только совпадать или лежать одна вне другой, но и иметь некоторую общую часть. Равенство фигур не обладает здесь свойством транзитивности, из $a=b$ и $b=c$ не следует, что и $a=c$, так как каждое из этих равенств верно лишь приближенно. Любому отрезку принадлежит в качестве меры его длины не одно число, а целая последовательность чисел в зависимости от достигнутой степени точности. Соответственно этому меняется и форма выражения теорем. Так, например, теорема Пифагора имеет здесь такой вид: «В прямоугольном треугольнике длины катетов будем полагать зафиксированными так, чтобы квадрат длины гипотенузы был равен сумме квадратов длин катетов». Маниà полагает, что геометрия Хьельмслефа, а также и построенная по тому же образцу арифметика «выведены из действительного опыта, не прибегая к какому бы то ни было процессу абстракции или идеализации». Совершенно ясно, что так может говорить лишь тот, кто сначала в качестве сторонника наивного реализма приписывает всем своим абстракциям реальное существование, а затем, убедившись в обратном, отвергает не этот свой неверный взгляд, а правомерность самого процесса абстрагирования.

Тем, кто все существующее, весь «опыт», всякую теорию считают порождением своего волевого акта, тем, конечно, нечего во-

[1] B. Mania, Sui fondamenti della geometria, «Giornale Critico della filosofia italiana», v. III, 1935.

зиться с абстракциями. Особенно ярко это видно у гитлеровского проповедника этих идей—у Динглера[1]. Этот «ученый», ни одним словом не упоминая о своем «нордическом» учителе Хьельмслефе, у которого он слово в слово списал все идеи «естественной геометрии»—геометрии контрольных плит,—зато тем пространнее останавливается на мировоззренческом ее значении. С истинно тевтонской «скромностью» он заявляет, что в его книге «первый раз после Эвклида положен совершенно новый фундамент геометрии». «Геометрия перестала быть познанием, она стала делом (Tat). Движение за эту новую геометрию является частью общего направления мысли в современной Германии, идущего от внешне формального к внутреннему смыслу, а в естественных науках прежде всего против вычислительной формалистики в духе Эйнштейна, этого представителя наиболее крикливых, наиболее далеких от всякого смысла, наиболее шутовских преувеличений». Формалистическое и абстрактное направление мышления, оказывается, представляет полную аналогию «бессмысленной абсолютизации организационных форм политического большевизма, в том числе и его социологического и личного направления», и, разумеется, борьба с ним—дело «подлинно творческого акта и творческого мышления» так называемой «национальной революции». Выступая как против греческих математиков (понятно, ведь они учились у «не-арийцев» египтян, а многие даже сами происходили из Малой Азии!) и завершившего их идеи Гильберта, так и против «венской школы», особенно против Рейхенбаха, а также интуиционистов (Вейля), Динглер кладет в основу всей математики «волю», которая ставит себе «цель» построить «систему» высказываний путем определенного «действия», а именно «принципа изготовления» (Herstellungsprinzip). Притом, так как аппараты для построения геометрии (контрольные плиты и т. п.) эвклидовы, оказывается, что единственно возможной является лишь эвклидова геометрия, далее, что должна быть отвергнута теория относительности, и т. п.

В том же направлении, как и Динглер, другой эмпирик, Бибербах, прилагает все усилия, чтобы доказать, что «учение о крови и расе захватывает и область математики, подчиняет и наиболее абстрактную из всех наук унифицированному государству». Выступив с докладом о «новой математике»[2], Бибербах прежде всего одобрил изгнание из Геттингенского университета «неарийца» Ландау, крупнейшего среди современных специалистов по теории чисел, заявив, что «случай с Ландау ясно показывает, что существуют германская и еврейская математика, два

[1] H. Dingler, Die Grundlagen der Geometrie, 1933.
[2] Опубликовано в журнале «Deutsche Zukunft» № 14, 1934 г.

мира, разделенные непроходимой пропастью. Выбор проблем и метод их решения характерны для мыслителя и поэтому являются порождением его расовой принадлежности. Так, стиль Ландау свидетельствует о духовном высокомерии, смущая и отпугивая своей отчужденностью от действительности».

В качестве «подтверждения» Бибербах привел способ трактовки круговых функций и числа π в учебнике Ландау «Введение в анализ», противопоставив ему «доступный» способ, которым «арийский» математик Эрхардт Шмидт трактует тот же предмет. При этом он заявил: «Народ, осознавший самого себя, не может терпеть таких учителей, должен отклонить чуждое мышление». Далее Бибербах рассматривает различия между французским и англо-германским способами математического мышления, ссылаясь при этом на неодобрительные высказывания Пуанкаре о Максвэлле, а также противопоставляя способ введения мнимостей у Гаусса, который соблюдал наибольшую наглядность, способу Коши—Гурса, которые выдвигают на первое место чисто формальные моменты. «У нас, немцев,—говорит Бибербах,—способ изложения Коши—Гурса вызывает невыносимое неудовольствие, а у всяких Ландау, конечно, не вызывает. Тут имеется нечто, определяемое самим строением психики». В качестве прототипов германско-еврейского антагонизма в математике Бибербах выставляет Гаусса и Якоби. Гаусс—остфалец (саксонец), полная противоположность Якоби с его «восточным бесцеремонным эгоизмом и интеллектуальной спесью». В то время как «мышление Гаусса всегда было глубоко и ясно и притом направлено на наглядность и практическое применение, мышление Якоби было, напротив, умышленно абстрактно, полно духовной надменности и дьявольской изворотливости. Для еврейской математики вообще показательны жонглирование понятиями и ее явно продувной характер. Еврейское мышление отличается тем, что оно ухватывается за что-либо уже готовое и эксплоатирует его, между тем как арийское мышление творит из самого себя. Поэтому плодом еврейского мышления является дегуманизация математики, ее отчуждение от природы, наглядности и практического применения. Разрыв математики на чистую и прикладную недаром берет свое начало у Якоби».

Противопоставляя педагогический принцип своего учителя Клейна (который, увы, настаивал, о чем, конечно, Бибербах умалчивает, на интернациональном характере математики)—«воспитание наглядного мышления»—принципам венского аксиоматика Гана, высказывающегося за воспитание способности абстрагирования, Бибербах утверждает, что здесь проявляется противоположность обоих типов и что вообще «спор вокруг обоснования математики, который бушует в наши дни, является на деле расовым спором».

Понятно, что отсюда вытекают и соответствующие организационные выводы—та практическая политика в области культуры, которая столь «успешно» проводится в «третьей империи» и плоды которой—изгнание десятков крупнейших ученых «неарийцев» или не пожелавших «унифицироваться», разгром университетов и научных институтов—известны всему миру. Бибербах описывает это «дело» так: «Математика освобождается от проклятия стерильного интеллектуализма. Его бремя падает на тех мыслителей, чуждых народу и расе, которые не будут существовать в будущем, и на тех представителей, принадлежащих прошлому, которых больше нельзя будет рассматривать как немецких исследователей».

Разумеется, что вся «аргументация» Бибербаха основана на грубой и беззастенчивой фальсификации истории математики. Ведь как раз Гаусс вместе с Абелем и Коши своими первыми исследованиями сходимости положили начало современному логическому, не прибегающему к обманчивой наглядности, обоснованию анализа. Именно Якоби, давший ценнейшие работы по теории возмущений и динамике, вместе с Риманном, Клебшем и Ли принадлежит к наглядно-дедуктивному направлению в математике. Именно Клейн без конца, на все лады твердил о ценности современной математики как строго логически обоснованной, избегающей ошибок «райского» состояния, в котором она находилась еще в XVIII в., когда, опираясь на наглядность, не различали между «добром» и «злом», между сходящимися и расходящимися рядами и т. д. Но имеет ли вообще смысл полемизировать с подобного рода людьми, как Бибербах? Только имея перед собой отягченных не столько знаниями, сколько пивом буршей-штурмовиков, можно рассчитывать, что доклад, исходящий из «тезиса» существования «арийской» и «не-арийской» математики, благополучно закончится торжественным «что и требовалось доказать» и что аудитория встретит его с восторгом, описанным Гейне:

«Все мы ослы! И-а! И-а!
От лошадей свобода!
Клячу долой! Виват, ура,
Король ослиного рода!»

Так говорил патриот. И зал
Дружно оратору хлопал.
Каждый националистом стал
И бил копытом об пол.

Дубовый венок на его главу
Потом возложило собранье,
И он благодарил толпу,
Хвостом махая в молчанье.

Справедливость требует отметить, что в целях унификации математики фашисты пользуются не одним только эмпиризмом. Подобно тому как в области философии в целом фашизм охотно использует в своих целях любую идеалистическую систему, прекрасно уживаясь одновременно с неогегельянством, с неокантианством, с ницшеанством и с «философией существования», так и в области философии математики фашизму одинаково ко двору как вульгарнейший эмпиризм Динглера и Бибербаха, так и мистические измышления Шпейзера, Тильдге, Вейля, извлекающих из забытья рухлядь астрологии, оправдывающих гороскопы и разную другую чертовщину, провозглашающих математику «духовной наукой». «Математизирование,—пишет Вейль—есть, как миф, язык, музыка, один из первоначальных творческих способов поведения человека, в которых выступает, побуждая к выражению гармонии мира, его величайшая человечность, духовная воля к творчеству (Gestalltungswille)». Вот именно поэтому, а не ради ее эмпирических приложений «математика должна стать на службу национального воспитания, воспитания, ведущего к богу».

Тому, кто знаком с историей математики царской России, уже приходилось встречаться с аналогичными взглядами. Известно, что так называемая «Московская математическая школа»—Цингер, Бугаев, Некрасов—проповедовала, будто «арифмология» (теория чисел и непревывных функций) обосновывает индивидуализм, анализ с его непрерывностью направлен против революционных идей, теория вероятностей подтверждает беспричинность явлений и свободу воли, а вся математика в целом находится в соответствии с принципами философии Лопатина—православием, самодержавием и народностью»[1].

Этот черносотенный образ мыслей был полностью донесен до наших дней одним из «столпов» этой школы Лузиным, который придал ему некоторую более «современную» фашистскую окраску. Вместе с тем Лузин «исправил» эту идеологию в деталях, заменив открытую проповедь православия более тонким дурманом—субъективным идеализмом и солипсизмом. Так, например, натуральный ряд чисел провозглашается Лузиным «функцией головы того математика, который в данном случае говорит о натуральном ряде»[2].

Рассмотренные нами вкратце идеалистические направления в математике роднит отрицание, во-первых, того, что за абстрактным характером понятий математики спрятаны их происхождение и связь с материальной действительностью, и, во-

[1] Н. Бугаев, Идеи непрерывности и прерывности, Казань 1905 г.
[2] N. Lousin, Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930.

вторых, того, что и логическая связь математических понятий является лишь отражением материальных процессов. Именно это отрицание, определяемое в конечном счете классовой природой современного капиталистического общества, приводит к идеализму, а в сочетании с вытекающей из того же источника метафизической установкой—к тому глубокому кризису основ, который переживает современная буржуазная математика. Этот кризис в свою очередь приводит оба противоположные, наиболее последовательные направления—формализм и интуиционизм—в конце концов к финитизму, к отрицанию бесконечности. Он приводит формализм к признанию исключительно символического характера трансфинитных формул а интуиционизм к ограничению содержательной математики конечными областями, т. е. и в том и в другом случаях к фактическому отказу от математики как науки.

Но, как этому учил Ленин, все эти идеалистические направления, так же как и вся идеалистическая философия в целом, не являются только чепухой. Каждое из них на свой лад является односторонним преувеличением одной из граней познания, окостеневшим благодаря закреплению его эксплоататорскими интересами господствующих классов. Таким образом, каждое из них содержит в себе в более или менее искаженном виде момент истины, элементы подлинно научного обоснования математики, в задачу которого входит прежде всего путем изучения внутренней структуры математики раскрыть основные законы ее развития и подготовить тем самым возникновение новых методов исследования. Однако в полном объеме такую задачу может поставить, а тем более разрешить, только научная философия—философия диалектического материализма.

Материалистический ответ на основные вопросы философии математики—откуда берутся и какова сущность математических понятий и аксиом, почему получаемые логико-математическим путем выводы приложимы к действительности,—сформулированные еще Кантом, мы встречаем чаще всего у тех математиков, которые одновременно занимались физикой, естествознанием. Такие математики, как д'Аламбер, Лаплас или Монж, бывшие по всему своему мировоззрению механистическими материалистами, занимали и по отношению к математике материалистическую позицию.

Однако, не в пример естественникам, которые в огромном своем большинстве, по крайней мере когда они работали в лабораториях, были стихийными материалистами, большинство математиков тянулось к идеализму или в лучшем случае к эклектизму, материалистами же было только незначительное их меньшинство. Причина—в сугубо-абстрактном характере математики, в том обстоятельстве, что она крайне однобоко, лишь со сто-

роны количественной и пространственной, изучает действительность. Правда, способ, которым математика создает свой предмет, образует свои понятия, по существу не отличается от способа, которым отвлеченные понятия образуются во всех других науках. Но по степени отвлечения математические понятия относятся к наиболее отдаленным от действительных материальных процессов. Поэтому, несмотря на то что математические понятия, как и всякие другие, являются отражениями материальной действительности и возникли лишь в результате трудовой деятельности человечества, присущая им исключительно большая степень абстракции дает повод идеалистам провозглашать их творением чистого духа, разума или рассудка, познанием, не зависящим от внешнего материального мира.

То же самое относится и к методу математики. Если эмпирически установлены какие-либо величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с определенной степенью точности и если также эмпирически найден какой-либо закон $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, то логико-математическим путем отсюда можно получить ряд следствий и среди них, например, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, которое в пределах данной точности и при соблюдении некоторых общих условий (например, ограничений области изменения переменных) совпадает при эмпирической проверке с действительностью. Так, в простейших случаях, если x_1, x_2—измеренные стороны прямоугольника, то вычисленная величина его площади $\varphi = x_1 x_2$ может быть проверена измерением, или если $s = at^2$—найденный Галилеем эмпирический закон зависимости пути s падающего тела от времени t, то полученный диференцированием закон его скорости $\frac{ds}{dt} = 2at$ может быть также проверен экспериментом.

Объяснение того, почему абстрактный метод перехода $F \supset \varphi$ приводит к результатам, соответствующим действительности, лежит в следующем: самый этот процесс—безразлично, состоит ли он в простом сложении и умножении, или включает длиннейшие цепи диференцирования, интегрирования и т. п.,—отражает лишь действительные процессы, так как он происходит благодаря работе нашего мозга, который в свою очередь подчиняется физическим, химическим, биологическим законам материального мира, частью которого он сам является. Но процесс-математического выведения $F \supset \varphi$ проходит, как правило, длинный ряд промежуточных стадий $f_1, f_2, \ldots, f_n$, каждая из которых обыкновенно с первого взгляда не поддается истолкованию как отражение какого-то действительного материального процесса. Так, среди этих промежуточных преобразований иногда встречаются, например, такие, которые относятся к бесконечно малым или даже к мнимым величинам, между тем существо задачи не указывает на наличие подобных величин. Более того, из F можно

путем каких-либо других операций $g_1, g_2, \ldots, g_n$ вывести следствие ψ и т. д., и ничто в самой математике не указывает нам, почему из всех возможных $\varphi, \psi, \ldots$ мы остановились именно на φ—единственном, которое соответствует действительности.

Между тем, процесс выведения $F \supset f_1 \supset f_2 \supset \ldots \supset f_n \supset \varphi$ представляет обыкновенно, не что иное, как воспроизведение в сокращенном и приблизительном виде главного направления того исторического процесса, который прошла математическая наука, пока ей удалось вывести φ из F. Так, в приведенном примере с уравнением движения свободно падающего тела, первоначальным историческим этапом являлось исследование равномерного движения, и этот этап по существу воспроизводится в линейном приращении Δs при выводе производной. Или, скажем, при выводе закона больших чисел последовательно применяют сначала бином Ньютона, затем формулу Стирлинга и, наконец, интеграл Лапласа, повторяя тем самым в основном исторически пройденные этапы в порядке их следования.

Однако большинство математиков не желает замечать зависимости математического процесса от процесса исторического развития производительных сил. Они предпочитают твердить о «свободе» математического мышления и удивляться окутанной мистикой «загадке» совпадения результатов математических выкладок с действительностью. В этом способствует им прежде всего стихийный характер, который носит развитие буржуазной математики и капиталистического общества в целом, равно как и господствующие идеалистические и метафизические мировоззрения.

Характерно, что во второй половине XIX и в начале XX в. математики-материалисты в капиталистических странах стали крайне редки. Лишь у немногих математиков—мы уже приводили Клейна—встречаются отдельные материалистические высказывания. Так, например, Эрмит в 1894 г. писал: «числа и функции—не произвольные продукты нашего духа, они существуют вне нас с тем же характером необходимости, как вещи объективной реальности, и мы встречаем или открываем и изучаем их как физики, химики, зоологи и т. д.». Иногда мы находим и замечательные примеры деалектического мышления, но все это не представляет цельного мировоззрения, а входит в эклектический набор идей совершенно другого пошиба—кантианских, конвенционалистских, позитивистских и т. п.

Только в России влияние материалистических взглядов великих французских математиков попрежнему давало себя знать. Остроградский жил идеями Лапласа, Фурье, Ампера. Лобачевский заявил в споре между кантианством и сенсуализмом: «Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь нау-

ка... приобретаются чувствам; врожденным не должно верить» и далее: «В природе мы познаем собственно только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Все прочие понятия, например геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения, а потому пространство само собой отдельно не существует». Чебышев писал в 1856 г. в работе «Черчение географических карт», что «сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает: сами науки развиваются под влиянием ее, она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы, существенно новые для науки, и таким образом вызывает на изыскание совершенно новых метод. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае наука находит себе верного руководителя в практике». Все они защищали взгляды, от которых западноевропейская наука, переживающая послереволюционный реакционный период, давно отреклась.

С наступлением новой эры в истории человечества, с победой Великой пролетарской революции в СССР, положение изменилось. Мир раскололся надвое не только по линии экономической и политической, но и в области всех идеологических надстроек. Деградация буржуазной науки и невиданный в истории рост науки, наблюдаемый в СССР, ускорили процесс поляризации в среде советских ученых и стимулируют его среди ученых капиталистических стран. Несмотря на чрезвычайные трудности, в разных странах Европы и в США начинают появляться ученые, приближающиеся в вопросе философии математики к диалектическому материализму или даже стоящие на позициях воинствующего диалектического материализма. В качестве примеров приведем имена швейцарского математика Гонсета и американского математика Стройка.

В статье «Действительность и математическая истина»[1] Гонсет, видный исследователь в области обоснования математики, противопоставляет друг другу двух математиков противоположных типов: это «математик прошлого», выражающий мнение большинства современных математиков, и «математик становления»,

[1] F. Gonseth, La réalité et la vérité mathémathique, «Scientia» 12, 1934 г. См. также статью А. Фишер «Философия математики Гонсета» в журнале «Под знаменем марксизма» № 5, 1934 г.

выражающий взгляды самого автора. Утверждение, будто «математика сама себе философия», подразумевающее на деле, что «всякая математическая истина вечна и неизменна», он характеризует как «неосознанную приверженность платоновской традиции». Исходя из современного кризиса основ математики, он показывает, что даже «математик прошлого», считающий, будто «своей логической стороной математика основывается попрежнему на абсолютной истине», фактически признает, что «истинность аксиом для него имеет другой смысл, чем она имела для Эвклида, а также что сам дедуктивный метод тоже изменился и изменяется, ибо как раз о структуре выводов идут самые злободневные споры. Значит, изменяется само понятие математической истины».

К этому же заключению он приходит, сравнивая между собой точки зрения школ логистов, формалистов и интуиционистов, претендующих каждая в свою очередь на то, что она одна обладает научным понятием математической истины. Наконец, Гонсет дает в положительном виде объяснение сущности и происхождения предмета и метода математики: «Аксиомы выражают в схематической форме условия, наблюдаемые в действительности. Внешнее значение геометрии—это физическое пространство. Аксиомы и основные понятия геометрии—это то, что необходимо символически подражает действительности, для того чтобы геометрия соответствовала своим целям, которые, скажем еще раз, состоят в описании и в овладении пространством. Ее внутренняя структура (между ней и внешним значением геометрии имеется взаимная обусловленность)—это то, что составляет объект геометрии как абстрактной и рациональной науки. Наконец, ни по части значения, ни по части структуры эта схема не достигает сразу своего завершения: она по существу становящаяся. Доказательством является изменение понятия пространства: пространство Эвклида, неэвклидовы пространства, метрические пространства Римана, пространства Картана и т. д.».

Таким же образом раскрывается и «тайна логико-математической дедукции». У формалистов и у интуиционистов целое число занимает привилегированное место, однако Гонсет объясняет, что «число—это идеализация физического свойства сложных объектов»; «внешнее значение арифметики относится к собраниям объектов, конечным или открытым. Здесь опять-таки понятие истины перестает быть дедуктивно логическим, сменяясь известным соответствием с действительностью». И сама логика с ее аксиомами и правилами представляет лишь некоторую схематизацию действительности, причем схематизацию второго порядка. «В итоге, абстрактная истина—это схема, выведенная из самой непосредственной действительности. Это та обыкновенная истина, которая, какой бы она ни была сум-

марной, незаконченной и схематичной, выносит приговор о ценности наших мыслей».

Если материалистическим и антиметафизическим взглядам Гонсета недостает конкретного историзма и они представляют поэтому некоторое подобие фейербахианства в философии математики (кроме того сказывается и влияние Канта), то у Стройка, в его работах по обоснованию теории вероятностей, по истории диференциальной геометрии и др., мы находим концепции материалиста-диалектика. Приведем небольшую выдержку из его статьи, помещенной в сборнике «Марксизм и естествознание»[1]. Он пишет: «Между развитием и исследованиями математики в течение определенного исторического периода и социальной структурой этого периода существует тесная связь»... «Математика, как и всякая другая естественная наука, объективна лишь постольку, поскольку она ставит своей целью изучение отношений реального мира, мира, в котором находится человек, в котором он действует и к которому принадлежит само человечество». «$2 + 2 = 4$ является выражением реальной действительности, существующей во внешнем мире и, следовательно, независимой от какого-либо человеческого вмешательства. Это не значит, что аксиоматика в понимании Эвклида или в позднейшей интерпретации Гильберта является бесполезной. Когда Гильберт строит свою эквлидову геометрию как некоторую логическую игру с неопределенными элементами, где два элемента класса A (точки) определяют один элемент класса B (линия) и т. д., он выполняет не только замечательную, но и полезную работу. Однако эта работа освещает лишь одну сторону математики. Причина этого в том, что математика не сводится только к аксиоматике, к логике, но она является и... наукой, имеющей дело с количественными отношениями внешнего мира». Аналогичные взгляды, хотя не всегда достаточно четко сформулированные, высказывают и английский математик Леви[2] и французский математик Лаберен[3].

Прямые высказывания основоположников диалектического материализма по вопросам философии и истории математики содержатся в «Анти-Дюринге» и в «Диалектике природы» Энгельса, в математических рукописях Маркса, в отдельных замечаниях из других сочинений и в переписке Маркса и Энгельса, в «Материализме и эмпириокритицизме», в философских тетрадях и в целом ряде других работ Ленина. Здесь изложены основные руководящие идеи важнейших узловых проблем философии и истории матиматеки, даны гениальные образцы

[1] Партиздат, 1933.
[2] H. Levy, The Universe of Science, 1932.
[3] В сборнике «A la lumière du marxisme», 1935.

применения и дальнейшего развития материалистической диалектики и исторического материализма. Не может быть и речи о том, чтобы в рамках этой главы дать изложение разностороннего содержания мыслей Маркса, Энгельса, Ленина о математике, показать, как философские и исторические идеи, развитые в работах Сталина, должны применяться к математике. Эта задача выходит за пределы данной книги, ей должна быть посвящена отдельная работа, в которой давно ощущается потребность. Ограничимся далеко не полным и сжатым перечнем важнейших проблем, освещенных в этих высказываниях.

Прежде всего, это учение об эмпирическом зарождении начальных понятий математики—фигуры и числа, о происхождении всей математики «из потребностей человека: из измерения земли и вместимости сосудов, из исчисления времени и механики»[1], учение о развитии математики под определяющим влиянием развития производительных сил и производственных отношений. На каждом этапе своего исторического развития математика имеет свой особый характер, свои собственные и особые законы развития. Так, например, математика феодализма, которая вместе со всей остальной наукой являлась смиренной служанкой церкви, была втиснута в тесные догматические рамки, не позволяющие ей выходить за пределы, установленные верой,—в корне отличается от математики эпохи Возрождения, которая, ломая в своем бурном развитии все закоснелые традиции, должна была помогать буржуазии развивать промышленность, проникая своим методом в механику земных и небесных тел, в естествознание вообще. Законы развития математики определяются в конечном счете тем, что «класс, имеющий в своем распоряжении средства материального производства, в силу этого располагает и средствами духовного производства, так что ему благодаря этому в то же время в общем подчинены мысли тех, у кого нет средств для духовного производства»[2]. Как и все другие идеологии, как и вся наука, математика имеет в классовом обществе классовый характер, ход ее развития через экономику, технику, естествознание и философию в конечном счете определяет классовая борьба. Это вовсе не опровергается тем обстоятельством, что фактическое содержание математики остается мало изменчивым во времени и поэтому имеет одинаковую значимость как для пролетария, так и для буржуа, на чем так настаивал Плеханов, делавший

[1] Маркс и Энгельс, Собр. соч., т. XIV, стр. 39.
[2] Маркс и Энгельс, Немецкая идеология, Партиздат, 1933, стр. 36—37.

отсюда ложное заключение об отсутствии классового характера математики.

Исходя из диалектического материализма, решается и вопрос о математическом творчестве, о возникновении и развитии математических теорий. «...выведение математических величин как будто бы друг из друга доказывает не их априорное происхождение, но только их рациональную связь»[1]. Признание за математикой специфичности ее развития не имеет ничего общего с идеалистическим взглядом на математику как на «свободно» развивающуюся деятельность человеческого ума, с той точкой зрения, которая так ярко была сформулирована Пуанкаре: «Математик не может как попало сохранять все встретившиеся ему факты; к тому же еще эти факты творит он сам, или, скажем иначе, их творит его каприз».

Имея свой собственный предмет и свои собственные методы, развиваясь по своим собственным законам, математика при этом подчиняется в своем развитии законам материалистической диалектики, как это показано Энгельсом на понятиях нуля, единицы, арифметических действий, конечного и бесконечного в математике и т. д.

Будучи наукой о количестве, математика вместе с тем содержит и качественные моменты и черты, характерные для конкретного понятия. «Число есть чистейшее известное нам количественное определение. Но оно полно качественных различий... 16 не есть просто сумма 16 единиц, оно также квадрат 4 и биквадрат 2»[2]. Уже в элементарной арифметике и алгебре происходит «превращение из одной формы в другую, противоположную», причем это превращение «вовсе не праздная игра», а «один из самых могучих рычагов математического знания, без которого в настоящее время нельзя произвести ни одного сколько-нибудь сложного вычисления»[3]. Чем дальше развивается математика, тем больше весу приобретает ее к а ч е с т в е н н ы й характер, тем больше и роль категории м е р ы как единства количества и качества. «Все больше и больше заметен качественный и целостный характер будущей математики»,—заявил Севери[4] в своем докладе на десятом международном математическом конгрессе, причем следует учесть, что философия этого итальянского математика весьма далека от марксизма. Обе противоположные тенденции, сталкивающиеся во всякой науке,—тенденция, идущая от конкретного к

[1] М а р к с и Э н г е л ь с, Собр. соч., т. XIV, стр. 39.
[2] Там же, стр. 448.
[3] Там же, стр. 426.
[4] F. S e v e r i, Le rôle de la géométrie algébrique dans les mathématiques, 1932.

абстрактному (например, в физике от понятия «цвета» к понятию «длины волны»), и обратная тенденция—выступают и в развитии математики. Одна ведет ко все большей ее абстрактности, другая—к ее «офизичению», и лишь в их единстве математика может служить своей цели—познанию и преобразованию действительности.

Пространственные формы и количественные отношения действительного мира являются предметом математики, причем они выступают здесь в крайне абстрактном виде. Свойственный математике метод отвлечения от действительного мира законов, метод так называемых «определений через абстракцию», носит диалектический характер и сходен с тем методом, который применялся Марксом в «Капитале» и о котором Ленин писал: «Таков же должен быть метод изложения (respective изучения) диалектики вообще (ибо диалектика буржуазного) общества у Маркса есть лишь частный случай диалектики»[1].

Как метко указывает Яновская[2]: «Из опубликованных недавно математических рукописей Маркса ясно, что... применяемый им метод тот же, каким он пользуется в «Капитале». Ставя себе задачу обосновать диференциальное исчисление, Маркс начинает «с самого простого, обычного, массовидного»—с обыкновенной алгебры и притом с простой суммы и разности двух чисел, вскрывая «в этом простейшем явлении... в с е противоречия (resp. зародыши в с е х противоречий)» (Ленин) диференциального исчисления. Больше того, самое изложение диалектики развития диференциала напоминает (конечно, только в самых общих чертах) общий ход развития понятия о деньгах в «Капитале». Диференциальные символы возникают сначала как символические эквиваленты некоторых реальных алгебраических процессов и лишь в ходе дальнейшего развития меняются с ними ролями: когда мы вступаем на собственную почву диференциального исчисления, исходным пунктом становится не реальный процесс, а (эквивалентный ему) диференциальный символ. И Маркс показывает, как забвение этой диалектики развития диференциала, попытка метафизически начать с р а з у с этого понятия как уже готового, заранее данного символа приводят к мистике бесконечно-малых, рассматриваемых как особый, таинственный сорт величин («мистическое диференциальное исчисление» Ньютона и Лейбница). Не удивительно, что тот же метод оказывается применимым и по отношению к простейшему исходному математическому понятию—количественному числу, что диалектика развития по-

[1] Л е н и н, Философские тетради, стр. 326.
[2] С. Я н о в с к а я, О так называемых определениях через абстракцию, «Под знаменем марксизма» № 4, 1935.

нятия о числе также оказывается частным случаем диалектики вообще».

Хотя с чисто математической стороны работы Маркса ограничены характером бывших в его распоряжении источников и полученные им результаты не могут быть поэтому механически перенесены на современную математику, Маркс дает такое л о г и ч е с к о е обоснование дифференциального исчисления, которое является вместе с тем и и с т о р и е й его развития. Он вскрывает подлинный смысл дифференциальных символов и сущность того диалектического перехода, который приводит от алгебраического дифференцирования к дифференциальному исчислению в собственном смысле слова. Выясняя оперативный смысл основных формул дифференциального исчисления, Маркс предвосхитил точку зрения, к которой пришли такие видные современные математики, как Адамар, лишь в наши дни[1].

Самая главная, величайшая ценность работ Маркса состоит в том, что на конкретном примере, на одной из важнейших проблем обоснования математики, в них показано применение метода материалистической диалектики в д е й с т в и и, что в противовес всем математикам, вводящим новые понятия чисто формально, здесь благодаря м е т о д у, у с т а н а в л и в а ю щ е м у е д и н с т в о л о г и ч е с к о г о и и с т о р и ч е с к о г о, показана необходимость введения именно этих, а не других понятий. Тем самым не посредством общих рассуждений, а путем п о к а з а дано доказательство возможности перестройки математики на диалектико-материалистической основе, дан прообраз такой перестройки, а вместе с тем и пример того, как должна выглядеть подлинно научная история математических наук.

Роль в математике логики, про которую Ленин писал, что она «есть учение не о внешних формах мышления, а о законах развития всех материальных, природных и духовных вещей», т. е. развития «всего конкретного содержания мира и познания его, т. е. итог, сумма, вывод истории мира»,—оказывается выясненной. «Если наши предпосылки верны и если мы правильно применяем к ним законы мышления, то результат должен соответствовать действительности, точно так же как вычисление в аналитической геометрии должно соответствовать геометрическому построению...»[2]. Причем «элементарная математика, математика постоянных величин, по крайней мере в целом и общем, движется в границах формальной логики. Математика переменных величин, существенный отдел которой

[1] В. Г л и в е н к о, Понятие дифференциала у Маркса и Адамара. «Под знаменем марксизма» № 5, 1934.

[2] М а р к с и Э н г е л ь с, Собр. соч., т. XIV, стр. 377.

составляет исчисление бесконечно-малых, есть в сущности не что иное, как применение диалектики к математическим отношениям». Хотя «добытые в диалектической области данные нельзя доказать посредством формальной логики», однако формальная логика не бессодержательна, она не отбрасывается, а снимается диалектической логикой. Математические символы, как это в своих математических рукописях доказал Маркс, являются отражением реальных процессов и ценны лишь тогда, когда отображают их адэкватно.

В вопросе о возможности применения математики к действительности, наряду с данным Энгельсом объяснением этой возможности из самого материального происхождения и сущности математики, мы находим у него замечания по поводу трудностей, встречающихся при ее применении в разных отраслях знания. На это же указывает и Ленин, говоря о возрастании трудностей, создаваемых для математики сложными формами движения при переходе от механики к физике, от физики к химии, от химии к биологии и далее к общественным наукам. Он предостерегает от опасности злоупотребления математикой, когда пытаются математическим методом подменить конкретные исследования и специфический анализ той или иной естественной или общественной науки. В то же время эти трудности и эти предостережения не закрывают пути к использованию математики даже в таких сложнейших областях, как политическая экономия, по отношению к которой Маркс высказал надежду, что можно будет «математически определить основные законы кризисов», исходя из анализа подъемов и падений нерегулярных кривых движения цен, нормы процента и т. д.

Высказывания Маркса, Энгельса, Ленина о математике должны служить руководящей нитью для подлинно научного ее обоснования. Это обоснование должно преодолеть р а з р ы в между т е о р и е й и п р а к т и к о й, между ф о р м о й и с о д е р ж а н и е м, между л о г и ч е с к и м и и с т о р и ч е с к и м, тот разрыв, которым страдает современная буржуазная математика и в котором выражается ее кризис. Если в бесплановом обществе определяющее влияние человеческой практики, понимаемой в самом широком смысле слова, сказывалось и сказывается лишь с т и х и й н о на развитии математики, то у нас, в плановом обществе, математики должны о с о з н а н н о строить свою науку так, чтобы актуальные задачи социалистического строительства определяли выбор ее ведущих проблем. Если до сих пор пытались обосновать математику чисто формально, то теперь ее обоснование должно включить в себя конкретное с о д е р ж а н и е науки, будучи неразрывно связано с задачами практики. Если все попытки идеалистов создать обоснование математики строились на одной лишь логике,

то теперь необходимо подвести под нее фундамент, который будет объединять в себе одновременно историческое и логическое обоснования.

Таким образом, с точки зрения марксизма-ленинизма обоснование математики не сводится к замене логистической, формалистской, интуиционистской и тому подобных систем аксиом, определений и т. д. какой-то другой диалектико-материалистической системой. Оно не сводится также к несравненно более сложному труду—к построению марксистской истории математики. Оно означает вместе с тем переделку всей математики, регулирование ее развития на плановых началах, исходящих из теоретического осмысления практики строительства социализма. Усвоение, критический пересмотр и коренная переработка достижений буржуазной науки—эта задача, поставленная для нашей эпохи Лениным и Сталиным, целиком относится и к математике.

Сложность и грандиозность этой задачи очевидны. Ведь речь идет здесь не о подборе каких-то отдельных иллюстраций, показывающих, скажем, что диалектический закон перехода количества в качество и обратно имеет место в алгебраической геометрии, или же демонстрирующих влияние потребностей мореплавания на развитие тригонометрии. Дело не в отдельных примерах и еще менее в попытках упрощенческого навязывания математике законов диалектики извне. Такие попытки появились у нас в период 1929—1931 гг. особенно со стороны некоторых, не в меру ретивых преподавателей, пытавшихся «внедрить» диалектический материализм в преподавание математики, идя по пути наименьшего сопротивления, фактически лишь дискредитируя диалектический материализм в глазах математиков. Дело в глубокой перестройке, основанной на всестороннем знании всего огромного материала, который накопился за шеститысячелетнее развитие этой древнейшей науки. Такая задача может быть решена лишь упорной и продолжительной коллективной работой.

Ведущую роль в деле обоснования математики, ее переработки должна занять история математики, трактуемая с точки зрения исторического материализма. Буржуазная история математики не может быть названа подлинной наукой, так как она в значительной части не пошла дальше накопления обширнейшего материала и отдельных жалких попыток установления кое-каких внешних закономерностей развития математики.

У нас, в СССР, работа по созданию марксистской истории математики ведется более оживленно лишь с первого всесоюзного математического съезда, состоявшегося в 1930 г. в Харькове. Несмотря на то что у нас существуют два института, занимающиеся историей естествознания и техники (в их

изданиях встречаются и работы по истории математики), все же отставание от заграницы, где имеются специальные журналы и сравнительно многочисленные кадры специалистов по истории математики, у нас все еще очень велико. Перелом, который нужен, для того чтобы сдвинуть это важнейшее дело, еще впереди.

Что касается вопросов философии математики в целом, то здесь возглавляет работу, которая за последние годы ведется у нас в ряде институтов в различных городах Союза, Московский математический институт. Его философской секцией руководит Яновская, имеющая серьезные исследования по обоснованию математики, работавшая над изданием математических рукописей Маркса. Журнал «Под знаменем марксизма» напечатал за последние годы несколько ценных статей в этой области.

В наших советских работах по философии математики дается освещение отдельных важных проблем с точки зрения диалектического материализма, и они представляют тем самым известный вклад в разработку научного обоснования математики, однако все это еще весьма далеко от намеченной цели. Прежде всего, критическая сторона, правда, важная и необходимая, часто развита в них за счет положительной, творческой. Конечно, диалектический материализм не может мириться с созданием какой бы то ни было, раз навсегда установленной, неизменной системы обоснования математики, он показывает, что меняется как сама математика, так и ее обоснование. Конечно, диалектический материализм борется против идеалистической фетишизации символов. Но ни то, ни другое не должно означать, что с точки зрения диалектического материализма не нужно построение систематического обоснования математики, а также, что немыслимо создание символики, которая отвечала бы законам диалектической логики. Надо прямо признать, что решительное «новое слово» в области обоснования математики мы еще сказать не успели.

Наконец, в области планирования математики мы имеем у нас в СССР значительные достижения. Сама идея внесения известного организованного начала в математическое творчество, впрочем, вовсе не чужда и буржуазным математикам, уживаясь, как это ни странно, с их взглядом на математическое исследование как на продукт каприза отдельного, свободно творящего ученого. С 1897 г. собираются каждые 3—4 года международные математические конгрессы с целью взаимного ознакомления математиков с работами разных стран и направлений. Наряду с ними и с математическими съездами в отдельных странах организующее значение имеют многочисленные математические журналы, издание «Энциклопедии математических наук» (на немец-

ком и французском языках), а также существование большого количества различного рода математических обществ.

Однако в капиталистических странах все эти организации мало способствовали единству математики, а, пожалуй, наоборот, еще больше закрепляли то обособление, какое приняло развитие отдельных школ и направлений в ней. В России, а затем и в СССР до 1930 г. существовали так называемые «петербургская» и «московская» школы. Первая имела эмпиристские узкоприкладные установки, решала отдельные задачи почти кустарными методами, находясь в своей доморощенной самобытности в отрыве от главной дороги развития мировой науки. Вторая же блистала крайней абстракцией своих теорий, доходящей до схоластических, номиналистических построений, перещеголяв самые изысканные вкусы парижских созидателей тонких и отвлеченных схем. В последнее время второй всесоюзный математический съезд, состоявшийся в 1934 г. в Ленинграде, установил значительное сближение обоих направлений, происшедшее за счет известного преодоления крайностей. Наряду с мероприятиями по планированию математической научно-исследовательской работы—всесоюзные и местные конференции по планированию тематики, связь с научно-исследовательскими институтами и предприятиямн различных отраслей народного хозяйства—необходимо особо отметить созыв международных конференций по узким специальностям, происходивших в Москве: по тензорной диференциальной геометрии в 1934 г. и по топологии в 1935 г., представляющих новый метод международной организации научной математической работы, инициатива в создании которого принадлежит математикам Советского союза. Вместе с тем было бы все же самообманом, если бы мы не отметили, что идея планирования не занимает еще среди наших математиков подобающего места и что наряду с вредными перегибами в сторону механического, бухгалтерского планирования мы встречаем у некоторых советских математиков сопротивление планированию и декларативное к нему отношение.

Следует сказать еще несколько слов о месте советской математики в мировой математической науке в целом. На протяжении всей книги мы имели возможность называть крупных советских математиков, которыми гордится мировая наука. Выдающихся успехов достигли некоторые молодые советские математики, завоевав себе своими открытиями мировую известность. Уже сейчас, в нашей стране, это наиболее творчески активное младшее поколение математиков насчитывает—по признанию даже далеко не близких нам иностранных ученых—больше выдающихся исследователей, чем в любой другой стране. Но научная объективность требует признать, что советская математика вместе с тем разделяет участь многих наших естественных наук:

в целом она лишь догоняет мировую науку, в лучшем случае идет с ней нога в ногу, но на сегодняшний день не может еще претендовать на возглавление, на ведущую роль. Подобно тому как советская физика не выработала пока еще своих собственных теоретических установок, а в области эксперимента в основном только повторяет передовые достижения западной физики—так и в математике мы не имеем пока большой советской математической школы, которая вела бы за собой виднейших математиков капиталистических стран.

Нельзя также умолчать о существующем у нас разрыве между вершинами советской математической мысли и низким уровнем преподавания математики в школах, невысокой математической культурой наших инженеров.

Подготовка преподавателей математики высших классов средней школы передана педагогическим институтам, которые, как правило, не в состоянии дать им подлинно научного образования. Кадры квалифицированных преподавателей вузов и втузов все еще крайне малочисленны, систематическое повышение их научной квалификации не налажено. Неудовлетворительно обстоит у нас еще дело и с организацией работы по практической математике, по созданию кадров инженеров, вооруженных всеми достижениями современной математики, а также по широкой популяризации математических знаний, несмотря на то что именно только социалистический строй создает для этого все возможности.

В 1900 г. на международном математическом конгрессе в Париже Гильберт набросал в своей речи обширную программу, выдвинул 23 крупных математических проблемы, ожидающих своего решения. За истекшие 35 лет почти все без исключения проблемы этой программы были решены, но зато выросли, частично из них же, новые, не менее трудные задачи. Однако охвативший современную буржуазную математику кризис основ, слишком глубокие методологические разногласия между отдельными направлениями почти исключают для нее возможность построения единой программы математической проблематики, подобной программе Гильберта, если только не удовлетвориться простым собранием не объединенных одной руководящей идеей проблем. Выдвижение такой центральной идеи, построение вокруг нее ведущей проблематики—вот задача, которую сможет разрешить лишь математика, опирающаяся на философские предпосылки диалектического материализма.

Как и 35 лет назад, перед математиками стоит вопрос о дальнейших путях и перспективах развития математики, но ответы, получаемые из уст буржуазных математиков, звучат все более и более пессимистически. Одним кажется, что математика на их глазах распадается на отдельные, не связанные между

собой дисциплины, другим, что отыскание новых проблем является делом случая, третьим, что вообще в математике могут встречаться проблемы, которых никогда нельзя будет разрешить, четвертые же, чтобы предохранить математику от подобных бедствий, предлагают ограничить круг ее действия, надеясь, что при этом условии можно будет построить такой универсальный метод, который служил бы для поисков новых методов математики. Однако для математика, усвоившего основы марксистской философии, ясно, что все эти злоключения происходят от забвения математиками практики—этой питательной почвы, которая в последнем счете выращивает всю математическую проблематику. Это вовсе не означает, что и сама математическая теория, являющаяся порождением практики, в свою очередь не способна выдвигать новые проблемы. И если часто противопоставляют друг другу два направления—одно, которое делает упор на создание новых, широких, обобщающих теорий, и другое, которое подчеркивает необходимость довести каждую отдельную задачу до конкретного результата с минимальными затратами,—то истина лежит в их синтезе, причем в синтезе, построенном на диалектико-материалистической основе. Лишь обосновавшись на крепких философских позициях, математик не будет мучиться вопросом, стоит или не стоит заниматься той или другой проблемой. Лишь выяснив историческое развитие и логическую структуру той математической области, к которой данная проблема принадлежит, найдя ее место в ряде понятий, он перестанет гадать, какова ее познавательная ценность. Итак, и в этом вопросе, который так больно ощущает каждый математик-исследователь, дело упирается в великую проблему перестройки математики в целом.

Как бы ни были громадны трудности, стоящие на пути решения этой задачи, они не могут отпугнуть поколения людей, совершающих несравненно более значительные подвиги, людей, переделывающих мир. Для партийных и непартийных большевиков и в математике руководством к действию является гениальная мысль Сталина: «Наука потому и называется наукой, что она не признает фетишей, не боится поднять руку на отживающее, старое и чутко прислушивается к голосу опыта, практики»[1].

---

[1] Сталин, Речь на Первом всесоюзном совещании стахановцев, Партиздат, 1935, стр. 22.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абданк-Абаканович Abdank-Abakanowicz, стр. 216
Абель Abel, N. H. (1802—1829), стр. 22, 47, 54, 121, 289
Адамар Hadamard, J. (род. 1865), стр. 109, 111, 127, 249, 284, 299
Адамс Adams, I. C., стр. 208
Александер Alexander, J. W. (род. 1888), стр. 176, 183
Александров, П. С. (род. 1896), стр. 9, 183, 185, 187
ибн Альхаитам (965?—1039), стр. 225
ибн Альхауризми (около 825), стр. 25
Ампер Ampère, A. M. (1775—1836), стр. 293
Амслер Amsler, J. (1823—1912), стр. 215
Аристотель (384—322), стр. 72
Архимед (287—212), стр. 21, 114, 115, 136, 220
Базаров, В. (род. 1874), стр. 240
Барбье Barbier, стр. 165, 167
Бателан Bateman, H., стр. 209
Башелье Bachelier, стр. 249
Башфорт Bachefort, стр. 208
Бейес Bayes, T. (ум. 1763), стр. 241
Бельтрами Beltrami, E. (1835—1900), стр. 147
Бемер Böhmer, P., стр. 223
Бер Baire, R., стр. 111, 112, 284
Бермант, А. Ф. (род. 1904), стр. 129
Бернштейн, С. Н. (род. 1880), стр. 111, 204, 235, 250, 252
Бернулли, Даниель Bernoulli, D. (1700—1782), стр. 104, 250
Бернулли, Иоганн Bernoulli, J. (1667—1748), стр. 104, 124, 125
Бернулли, Яков Bernoulli, J. (1654—1705), стр. 113, 124, 231, 238, 239, 240, 241, 246
Бертран Bertrand, J. L. F. (1822—1900), стр. 66, 232, 251
Бессель Bessel, F. W. (1784—1846), стр. 197, 205
Бетти Betti, E. (1823—1892), стр. 169, 170, 174
Бибербах Bieberbach, L. (род. 1886), стр. 30, 287, 288, 289, 290
Биркгофф Birkhoff, G. D. (род. 1884), стр. 183, 188, 236
Блашке Blaschke, W. (род. 1885), стр. 165
Блэк Black, M., стр. 254
Боголюбов, Н. Н. (род. 1907), стр. 208
Бозе Bose, J. Ch. (род. 1858), стр. 252
Бойль Boyle, R. (1627—1691), стр. 252
Больцано Bolzano, B. (1781—1841), стр. 78
Больцманн Boltzmann, L. (1844—1906), стр. 251, 252
Больяи Bolyai, J. (1802—1860) стр. 130, 134, 135, 136
Бонолис Bonolis, A., стр. 66
Бор Bohr, N. (род. 1885), стр. 274
Борель Borel, E. (род. 1871), стр. 109, 110, 111, 116, 234, 251, 276, 284, 285

Борткевич В. И. (род. 1868) стр. 246
Боули Bowly, A. L. (род. 1869) стр. 246, 248
Боярский, А. Я. (род. 1906), стр. 246
Брауэр Brouwer, L. E. J. (род. 1881), стр. 169, 170, 174, 182, 187, 278, 279
Броден Brodén, T. (род. 1857), стр. 111
Брунн Brunn, H. (род. 1862), стр. 181
Брунс Bruns, H. (1848—1919), стр. 66
Бугаев, Н. В. (1837—1903). стр. 290
Буняковский, В. Я. (1804—1889), стр. 242
Бурали-Форти Burali-Forti, C., стр. 91, 262, 264
Бурстин, Ц. Л. (род. 1889), стр. 163, 222
Бутру Boutroux, E. E. M. (1845—1921), стр. 279
Буш Busch, стр. 217
Бюффон Buffon, G. L. L. (1707—1788), стр. 234, 236

ван дер Ваальс van der Waals, J. D. (1837—1923), стр. 251
Вален Vahlen, Th. (род. 1869), стр. 222
де ла Вале Пуссен de la Valée Poussin, Ch. (род. 1896), стр. 203
Вальрас Walras, M. E. L. (1834—1910), стр. 250
ван дер Варден van der Waerden, B. L., стр. 162
Варинг Waring, E. (1734—1798), стр. 67
Веблен Veblen, O. (род. 1880), стр. 161, 168, 183
Вейерштрасс Weierstrass, K. T. (1815—1897), стр. 93, 97, 106, 108, 109, 110, 120, 126
Вейль Weyl, H. (род. 1885), стр. 161, 162, 181, 252, 255, 257, 263, 266, 277, 280, 287 290
Веронезе Veronese, G. (1857—1917), стр. 115
Виллерс Willers, F. A., стр. 222
Вильсон Wilson, J. (1741—1793), стр. 65
Виноградов И. М. (род. 1891), стр. 67
Виттгенштейн Wittgenstein, L., стр. 257, 266
Вольтерра Volterra, V. (род. 1860), стр. 108, 121, 122, 123, 124, 209
Вольфф Wolff, стр. 234

Галилей Galilei, Galileo (1564—1642), стр. 68, 74, 77, 292
Галуа Galois, E. (1811—1832) стр. 54, 63
Гальтон Galton, F. (1822—1911), стр. 243, 244
Гамильтон Hamilton, W. R. (1805—1865), стр. 42, 44, 154
Ган Hahn, H. (род. 1879), стр. 288
Ганкель Hankel, H. (1839—1873), стр. 48
Гарди Hardy, G. H. (род. 1877), стр. 67
Гаусс Gauss, K. F. (1777—1855), стр. 22, 23, 24, 40, 42, 46, 47, 48, 50, 69, 107, 134, 140, 147, 153, 158, 161, 168, 181, 197, 205, 242, 243, 244, 245, 247, 250, 256, 288, 289
Гаусдорфф Hausdorff, F. (род. 1868), стр. 22, 184, 244
Гегель Hegel, G. W. F. (1770—1831), стр. 6, 280
Гедель Gödel, K. стр. 268
Гейгер Geiger, стр. 254
Гейне Heine, H. (1797—1856), стр. 289
Гейтинг Heyting, A., стр. 282
Гельмгольц Helmholtz, H. L. F. (1821—1894), стр. 154
Гельдер Hölder, O. (род. 1859), стр. 264
Гельфонд, А. О. (род. 1906), стр. 68
Гербарт Herbart, J. F. (1776—1841), стр. 262
Герон Александрийский (около 100 до н. э.), стр. 126
Герсеванов Н. М., стр. 225
Гиббс Gibbs, J. W. (1839—1903), стр. 105, 205, 251
Гильберт Hilbert, D. (род. 1862), стр. 20, 121, 127, 144, 145, 146, 147, 266, 267, 268, 272, 283, 287, 296, 304
Гиппиас (около 420 до н. э.), стр. 223
Гиппократ (около 440 до н. э.) стр. 63
Глаголев, Н. А. (род. 1888), стр. 163 225
Гливенко, В. И. (род. 1897), стр. 250, 299

Гольдбах Goldbach, Ch. (1690—1764), стр. 65
Гонсет Gonseth, F., стр. 294, 295
Гончаров, В. Л. (род. 1897), стр. 129, 198
Гопф Hopf, H. (род. 1894), стр. 236
Гостинский Hostinský, B. (род. 1884), стр. 249
Граве, Д. А. (род. 1863), стр. 63
Грам Gram, I. P. (1850—1916), стр. 247
Грассманн Grassmann, H. G. (1809—1877), стр. 44, 154
Грегори Gregory, J. (1638?—1675), стр. 197
Громан, В. Г. (род. 1873), стр. 240
Гурвиц Hurwitz, A. (1859—1919), стр. 169, 181
Гурса Goursat, E. (род. 1858), стр. 288
Гюнтер, Н. М. (род. 1871), стр. 121, 129

д'Аламбер d'Alembert, J. (род. 1865), стр. 104, 105, 230, 291
Данжуа Denjoy, A., стр. 111, 117
Дарбу Darboux, J. G. (1842—1917), стр. 126, 151
Дедекинд Dedekind, J. W. R. (1831—1916), стр. 36, 37, 257, 265, 266
Дезарг Desargues, G. (1593—1661), стр. 130, 131
Декарт Descartes, R. (1596—1650), стр. 13, 14, 21, 22, 100, 153, 154, 223, 275
Делоне, Б. Н. (род. 1890), стр. 69
Ден Dehn, M. (род. 1878), стр. 177
Джевонс Jevons, W. S. (1835—1882), стр. 250
Джексон Jackson, D., стр. 204
Джинс Jeans, J. H. (род. 1877), стр. 157
Динглер Dingler, H. (род. 1881), стр. 196, 255, 286, 287, 290
Диофант (конец III в.), стр. 64
Дирак Dirac, P. A. M. (род. 1902), стр. 162, 252, 266
Дриш Driesch, H. (род. 1867), стр. 254
Дубислав Dubislav, W.. стр. 280
Жордан Jordan, C. (1832—1922), стр. 54, 98, 174, 182
Жюлия Julia, G.. стр. 110
Зелигер Seeliger, H. (род. 1849), стр. 243
Зенон (около 450 до н. э.), стр. 72
Зюсмильх Süszmilch, стр. 240

Кавальери Cavalieri, B. (1591?—1647), стр. 77, 113
Каган, В. Ф. (род. 1869), стр. 163
Какея Kakeya, S. (род. 1886). стр. 167
Камке Kamke, E. (род. 1900), стр. 235
Кант Kant, I. (1724—1804), стр. 10, 134, 161, 262, 279, 291, 295
Кантелли Cantelli, стр. 250
Кантор, Георг Cantor, G. (1845—1918), стр. 37, 48, 79, 86, 264, 285
Канторович, Л. В. (род. 1912), стр. 129
Каратеодори Carathéodory, C. (род. 1873). стр. 127
Кардано Cardano, G. (1501—1576) стр. 21, 231
Карлеман Carleman, T., стр. 111, 204
Карнап Carnap, R. (род. 1891), стр. 255, 274
Картан Cartan, E. (род. 1869), стр. 161, 295
Келдыш, Л. В. (род. 1904), стр. 129
Кельвин Kelvin, W. Thomson (1824—1907), стр. 225
Кеплер Kepler, J. (1571—1630), стр. 68, 77, 113
Кио Chió, F., стр. 29
Кларк Clarke, стр. 225
Клаузиус Clausius, R. J. E. (1822—1888), стр. 251
Клебш Clebsch, A. (1833—1872), стр. 289
Клейн Klein, F. (1849—1925), стр. 47, 54, 109, 115, 142, 145, 153, 167, 169, 221, 277, 285, 288, 289, 293
Клиффорд Clifford, W. K. (1845—1879), стр. 150
Клэро Clairault, A. C. (1713—1765), стр. 205
Кнезер Kneser, A. (род. 1862), стр. 127, 176
Колмогоров, А. Н. (род. 1903), стр. 9, 233, 249, 250, 282
Кондорсе Condorcet, M. J. A. N. C. (1743—1794), стр. 241
Кондратьев, Н. Д. (род. 1892), стр. 240

Конт Comte, A. I. M. F. X. (1798—1857), стр. 10
Коперник, Н. (1473—1543), стр. 21, 68
Коши Cauchy, A. L. (1789—1857), стр. 22, 54, 78, 93, 107, 108, 115, 116, 120, 208, 249, 288, 289
Кравчук, М. Ф. (род. 1893), стр. 63
Кристоффель Christoffel, E. (1829—1900), стр. 160
Кронекер Kronecker, L. (1823—1891), стр. 280
Круппа Kruppa, E. (род. 1885), стр. 227
Крылов, А. Н. (род. 1863), стр. 63, 208
Крылов, Н. М. (род. 1879), стр. 208, 209
Кузинри Cousinery, B. E. (1790—1851), стр. 226
Куммер Kummer, E. E. (1810—1893), стр. 64, 70
Курант Courant, R. (род. 1888), стр. 127
Курно Cournot, A. A. (1801—1877), стр. 231, 250
Курош, А. Г. (род. 1908), стр. 63
Кутта Kutta, стр. 208
Кутюра Couturat, L., стр. 256, 262
Кэли Cayley, A. (1821—1895), стр. 177

Лаберен Laberain, P., стр. 296
Лаврентьев, М. А. (род. 1900), стр. 127, 129
Лагерр Laguerre, стр. 204
Лагранж Lagrange, J. L. (1736—1813), стр. 104, 125, 126, 197, 205, 206
Лаланд Lalande, J. J. F. (1732—1807), стр. 223
Ландау Landau, E. (род. 1877), стр. 287, 288
Ланжевен Langevin, P., стр. 251
Лаплас Laplace, P. S. (1749—1827), стр. 121, 203, 231, 232, 237, 238, 239, 243, 246, 247, 249, 291, 292, 293
Лаппо-Данилевский, И. А. (1896—1931), стр. 121
Лебег Lebesgue, H. (род. 1875), стр. 111, 112, 116, 117, 118, 124, 127, 233, 284
Леви, П. Lévy, P., стр. 249
Леви, Г. Lèvy, H., стр. 296
Леви-Чивита Levi-Cività, T. (род. 1873), стр. 138, 159
Лейбниц Leibniz, G. W. (1646—1716), стр. 22, 27, 42, 101, 102, 103, 113, 124, 212, 213, 220, 257, 299
Лежандр Legendre, A. M. (1752—1833), стр. 204
Лежен-Дирихле Lejeune-Dirichlè, P. G. (1805—1859), стр. 105, 106, 111, 112, 121
Леметр Lemaître, G., стр. 157
Лемуан Lemoine, E. M. H. (1840—1912), стр. 222
Леонардо да Винчи Leonardo da Vinci (1452—1519), стр. 225
Ленин, В. И. (Ульянов) (1870—1924), стр. 6, 71, 221, 240, 273, 290, 296, 298, 299, 300, 301
Лефшец Lefschetz, S. (род. 1884), стр. 183
Ли Lie, S. (1842—1899), стр. 54, 153, 289
Либманн Liebmann, H. (род. 1874), стр. 165
Листинг Listing, J. B. (1808—1882), стр. 168, 179, 180
Литлвуд Littlewood, J. E. стр. 67
Лихтенштейн Lichtenstein, стр. 124
Лобачевский, Н. И. (1793—1856), стр. 130, 134, 135, 136, 141, 142, 143, 147, 157, 200, 293
Ломоносов, М. В. (1711—1765), стр. 250, 251
Лопатин, Л. М. (род. 1855), стр. 290
Лузин, Н. Н. (род. 1883), стр. 290
Люка Lucas, F. (род. 1836), стр. 221
Люстерник, Л. А. (род. 1898), стр. 127, 188
Ляпунов, А. М. (1857—1920), стр. 238, 248

Максвэлл Maxwell, J. C. (1831—1879), стр. 181, 251, 252, 288
Маниá Mania, B., стр. 196, 255, 286
Марков, А. А. (1856—1922), стр. 235, 238, 246, 248, 249
Маркс Marx, K. H. (1818—1883), стр. 67, 190, 239, 240, 246, 296, 297, 298, 299, 300, 301
Маршалл Marshall, A. (1842—1924), стр. 250
Мах Mach, E. (1838—1916), стр. 255, 266
Мебиус Möbius, A. F. (1790—1868), стр. 141, 155, 170, 172, 173, 174, 175, 181

Мейснер Meisner, E., стр. 225
Меллит Mellite, стр. 167
Мемке Mehmke, R. (род. 1857), стр. 225
Менгер Menger, K. (1840—1921), стр. 182, 187, 250
Мендель Mendel, G. J. (1822—1884), стр. 252
Меньшов, Д. Е. (род. 1892), стр. 129
Меслен Meslin, стр. 221
Мизес, v. Mises, R. (род. 1883), стр. 232, 249
Минковский Minkowski, H. (1864—1909), стр. 69, 165
Миттаг-Лефлер Mittag-Leffler, G. M. (1846—1927), стр. 109
Митчель, стр. 246
Монж Monge, G. (1746—1818), стр. 131, 225, 226, 276, 291
Монтель Montel, P., стр. 110
Муавр Moivre, A. (1667—1754), стр. 237
Мур Moore, Ch. (род. 1882), стр. 248
Мусхелишвили, Н. И. (род. 1891), стр. 121, 129
Мюнц, Г. М. (род. 1884), стр. 121, 129.

Неванлинна Nevanlinna, R., стр 110
Нейманн v. Neumann, J. E. R. (род. 1875), стр. 252
Некрасов, П. А. (род. 1853), стр. 290
Немыцкий, В. В. (род. 1900), стр. 188
Непер Neper, J. (1550—1617), стр. 21
Нитц Nitz, K., стр. 222
Новиков, П. С. (род. 1901), стр. 129
Нотт Nott, стр. 209
Ньютон Newton, I. (1642—1727), стр. 22, 101, 102, 103, 114, 117, 120, 124, 140, 161, 197, 200, 292, 299,

Однер Odhner, стр. 213
Окань d'Ocagne, Ph. M. (род. 1862), стр. 225
Орлов, М. Х. (род. 1899), стр. 209
Остроградский, М. (1801—1861), стр. 293
Отред Oughtred, W. (1574—1660), стр. 213

Падоа Padoa, A., стр. 262
Парето Pareto, V. (1848—1923), стр. 246, 250
Паскаль Pascal, B. (1623—1662), стр. 131, 213, 231, 251
Паш Pasch, M. (род. 1843), стр. 285
Пеано Peano, G. (род. 1858), стр. 99, 100, 257, 262
Пельзенер Pelseneer, J., стр. 283
Пенлеве Painlevé, P. (род. 1863), стр. 110
Перрен Perrin, J., стр. 251
Петровский, И. Г. (род. 1901), стр. 127
Петти Petty, W. (1623—1687), стр. 245
Пикар Piccard, E. (род. 1856), стр. 109, 120, 208, 225, 273
Пирсон Pearson, K. (род. 1857), стр. 246, 247, 248
Пифагор (около 550 до н. э.), стр. 33, 224, 225, 286
Планк Plank, M. (род. 1858), стр. 252
Платон (429?—348?), стр. 275
Плеханов. Г. В. (1856—1918), стр. 297
Полиа Pólya, G. (род. 1887), стр. 110, 200
Польке Pohlke, стр. 227
Понселе Poncelet, J. V. (1788—1867), стр. 130, 151
Понтрягин, Л. С. (род. 1908), стр. 63, 183, 187
Прейсед Prasad. стр. 209
Привалов, И. И. (род. 1891), стр. 111, 129
Пуанкаре Poincaré, J. H. (1854—1912), стр. 88, 108, 109, 120, 126, 169, 170, 174, 176, 187, 188, 236, 244, 255, 262, 267, 272, 273, 274, 276, 279, 288, 297
Пуассон Poisson, S. D. (1781—1840), стр. 231, 238

Радон Radon, J., стр. 118
Размадзе А. М. (1890—1929), стр. 127
Рамануджан Ramanujan, S. T. (1887—1920), стр. 67
Рамзей Ramsey, стр. 265
Рейхенбах Reichenbach, H., стр. 255, 274, 287
Рентген Röntgen, W. K. (1845—1923), стр. 145
Рессел Russel, B. A. W. (род. 1872), стр. 91, 92, 252, 255, 256, 257, 262, 263, 264, 265, 276, 283
Риманн Riemann, G. F. B. (1826—1866), стр. 22, 66, 107, 108,

116, 136, 139, 140, 141, 142, 146, 147, 153, 161, 162, 168, 172, 181, 289, 295
Риччи Ricci, G. (род. 1853), стр. 153, 159
Ришар Richard, J., стр. 92, 263, 265
Рожанская, Ю. А. (род. 1901), стр. 188
Романовский, В. И. (род. 1880)! стр. 250
Роте Rothe, H. (род. 1882), стр. 225
Рунге Runge, C. (род. 1856), стр. 205, 208, 222, 225
Рэло Reuleaux, F. (род. 1829), стр. 166
Рюкле Rückle, стр. 211

Севери Severi, F. (род. 1879), стр. 298
Сегал, Б. И. (род. 1901), стр. 67
Сегэ Szegö, G. (род. 1895), стр. 204
Серпинский Sierpinski, W. (род. 1882), стр. 285
Сильвестер Sylvester, J. J. (1814—1897), стр. 177
Симпсон Simpson, T. (1710—1761), стр. 199
де Ситтер de Sitter, W. (род. 1872), стр. 157
Скаутен, Schouten, J. A. (род. 1883), стр. 138, 159, 162
Слуцкий Е. Е. (род. 1880), стр. 250
Смирнов В. И. (род. 1887), стр. 129
Смит-Фалькнер М. Н. (род. 1880), стр. 246
Смолуховский v. Smoluchowski, M. (1872—1917), стр. 236, 251
Соболев, С. Л. (род. 1908), стр. 129
Сократ (470—399), стр. 223
Соро, стр. 225
Сталин, И. В. (род. 1879), стр. 6, 7, 296, 301, 306
Старовский, В. Н. (род. 1905), стр. 246
Степанов, В. В. (род. 1889), стр. 127
Стилтьес Stieltjes, T. J. (1856—1894), стр. 116, 118, 124, 233
Стирлинг Stirling, J. (1696?—1770), стр. 199, 239, 292
Стройк Struik, D. J., стр. 159, 236, 294, 295
Сушкевич, А. К. (род. 1889), стр. 63

Тарталья Tartaglia, N. (1500?—1557), стр. 231
Тейлор Taylor, B. (1685—1731), стр. 109
Тильгде Tielgde, стр. 290
Тихонов, А. Н. (род. 1906), стр. 188
Томсон Thomson, стр. 180
Тоннели Tonelli, L. (род. 1885), стр. 127
Тумаркин, Л. А. (род. 1904), стр. 188
Тэт Tait, P. G. (1831—1901), стр. 180, 181

УайтхедWhitehead, A. N. (род. 1885), стр. 257, 276
Уитстон Wheatstone, Ch. (1802—1875), стр. 221
Уиттекер Whittaker, E. T. (род. 1873), стр. 200, 209
Урысон, П. С. (1898—1924), стр. 183, 185, 187

Фейер Fejér, L. (род. 1880), стр. 205
Ферма́ Fermat, P. (1601—1665), стр. 23, 64, 65, 70, 125, 223, 256
Ферми Fermi, E., стр. 252
Ферроль Ferrol. стр. 211
Финетти Finetti, стр. 249
Фиников, С. П. (род. 1883), стр. 163
Финслер Finsler, P., стр. 161
Фихтенгольц, Г. М. (род. 1888), стр. 129
Фишер А., стр. 294
Фишер Fisher I. (род. 1867), стр. 246, 252
ван Флек van Vlek, E. B. (род. 1863), стр. 285
Фок, В. А. (род. 1899), стр. 162
Форсайт Forsyth. A. R. (род. 1858), стр. 128, 199
Фрай Fray, T. C., стр. 252
Франк, стр. 225
Франкль, Ф. И. (род. 1905), стр. 129
Фредгольм Fredholm, E. I. (род. 1866), стр. 121, 122, 123, 209
Фреге Frege, G. (1848—1918), стр. 40, 257
Фреше Fréchet, M., стр. 182, 185, 187
Фробениус Frobenius, G. (1849—1917), стр. 45
Фубини Fubini, G. (род. 1879), стр. 161
Фурье Fourier J., B. J. (1768—1830), стр. 104, 105, 121, 205, 293

Хартри Hartry, стр. 217
Хвистек Chwistek, L., стр. 257, 265
Хевисайд Heaviside, O. (1850—1925), стр. 129
Хегард Heegard, P., стр. 177
Хенриси Henrici, O., стр. 216
Хинчин, А. Я. (род. 1894), стр. 250
Хотимский, В. И. (род. 1892), стр. 204, 246
Хьельмслеф Hjelmslev, J. (род. 1873), стр. 196, 285, 286, 287

Цельнер Zöllner, стр. 155, 156, 157
Цермело Zermelo, E. (род. 1871), стр. 88, 91, 92, 111, 265, 284, 285
Цингер, В. Я. (1836—1907), стр. 290

Чаплыгин, С. А. (род. 1869), стр. 208
Чеботарев, Н. Г. (род. 1894), стр. 63
Чебышев, П. Л. (1821—1894), стр. 66, 197, 198, 204, 223, 235, 238, 247, 248, 249, 293
Чех Cech, E., стр. 161
Чубер Czuber, E. (род. 1851), стр. 225

Шаль Chasles, M. (1793—1883), стр. 151, 225
Шарлье Charlier, C. L. (род. 1862), стр. 247
Шенфлис Schönfliesz, A. (род. 1853), стр. 182
Шеффере Scheffers, G., стр. 227
Широков, П. А. (род. 1895). стр. 163
Шмидт, О. Ю. (род. 1891), стр. 63
Шмидт, Э. Schmidt, E. (род. 1876), стр. 209, 288
Шнирельман, Л. Г. (род. 1905), стр. 65, 127, 188
Шпейзер Speiser, A. (род. 1885), стр. 290
Шрэдингер Schrödinger, E. (род. 1888), стр. 162
Штаудт Staudt, K. G. Ch. (1798—1867). стр. 132, 153, 225
Штермер Störmer, C. (род. 1874), стр. 208
Шустер Schuster, стр. 206

Эвдокс (410?—356?), стр. 114
Эвклид (около 325 до н. э.), стр. 21, 66, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 150, 157, 161, 164, 254, 281, 287, 294, 295
Эджеуорт Edgeworth, F. J. (род. 1845), стр. 203
Эйлер Euler, L. (1707—1783), стр. 23, 64, 68, 77, 104, 105, 106, 125, 126, 127, 167, 168, 169, 207, 208, 225, 256
Эйнштейн Einstein, A. (род. 1879), стр. 69, 140, 161, 251, 252, 283, 287
Энгельс Engels, F. (1820—1895), стр. 6, 31, 71, 90, 103, 156, 157, 190, 246, 280, 296, 297, 298, 300, 301
Эратосфен (276—195?), стр. 66
Эренфест Ehrenfest, P. (род. 1880), стр. 162, 252
Эрмит Hermite, Ch. (1822—1901), стр. 197, 204, 293

Якоби Jacobi, K. F. A. (1795—1855), стр. 109, 204, 288, 289
Яновская, С. А. (род. 1896), стр. 9, 298, 302
Ястремский, Б. С. (род. 1877), стр. 246, 247

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ[1]

*Вилейтнер, Как рождалась современная математика.
*Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей.
Клейн, Лекции о развитии математики в XIX столетии.
Бохер, Введение в высшую алгебру.
*Баумгартнер, Теория групп.
*Греллинг, Теория множеств.
*Брюстер, Что такое исчисление бесконечно-малых?
Курант, Курс диференциального и интегрального исчисления.
Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного.
Александров и Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного.
Бляшке, Диференциальная геометрия.
Лукьяченко, Элементы неэвклидовой геометрии.
*Александров и Ефремович, О простейших понятиях современной топологии.
Бернштейн, Теория вероятностей.
Бернштейн, Современное состояние теории вероятностей.
Уиттекер и Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений.
*Вейль, О философии математики.
*Сборник. Математика за 15 лет.
*Сборник. Марксизм и естествознание, Партиздат.

[1] Для желающих расширить свои знания по вопросам, излагаемым в этой книге, приводим сравнительно нетрудную математическую литературу на русском языке, вышедшую в ОНТИ в 1933, 1934, 1935 гг. (наиболее доступные издания отмечены звездочкой).

17
15
32

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 5

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Определение математики, ее место среди других наук.—Первая ступень абстракции, натуральный ряд, расширение понятия числа.—Вторая ступень абстракции, переменные символы, алгебра, анализ.—Третья ступень абстракции, переменные операции, современная математика. 10

ГЛАВА ВТОРАЯ

Несоизмеримость, иррациональные числа.—Скаляры, векторы, тензоры, матрицы.—Комплексные числа.—Кватернионы, сверхкомплексные числа.—Основная теорема алгебры.—Высшая алгебра.—Принцип перманентности.—Алгебраические тела 32

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Понятие группы.—Группы прерывные и непрерывные, конечные и бесконечные, коммутативные и некоммутативные.—Изоморфизм, инвариантность.—Геометрия метрическая, аффинная, проективная, топология.—Теория чисел. 51

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

Бесконечность в математике.—Закон полной математической индукции.—Парадоксы бесконечного.—Понятие множества, классификация множеств, операции над множествами.—Трансфинитные числа.—Парадоксы теории множеств.—Точечные множества 71

ГЛАВА ПЯТАЯ

Теоретико-множественная критика основных понятий анализа.—Обоснование диференциального исчисления.—Понятие функции.—Теория функций комплексного переменного.—Теория функций действительного переменного.—Обоснование интегрального исчисления.—Диференциальные уравнения.—Интегральные уравнения.—Вариационное исчисление.—Функциональный анализ 96

Стр.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

Формирование современной геометрии.—Проективная геометрия, несобственные элементы, принцип взаимности.—Геометрия Лобачевского—Больяи, эллиптическая и сферическая геометрия.—Аксиоматический метод в геометрии, интерпретации.—Мнимости в геометрии.—Абсолютная геометрия, многомерные геометрии.—Дифференциальная геометрия.—Нериманновы геометрии 130

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

Геометрия в малом и геометрия в целом.—Основные понятия топологии.—Комбинаторная топология.—Теоретико-множественная топология.—Топологическое пространство, топологические методы и анализ 164

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

Теоретическая и практическая математика.—Интерполирование.—Приближенное решение уравнений.—Степенные приближения, способ наименьших квадратов, тригонометрические приближения.—Приближенное решение дифференциальных уравнений.—Оценки погрешностей в вычислениях.—Вычислительные таблицы, приборы, машины, физические методы в математике.—Практическая геометрия, графические методы, номография, начертательная геометрия, пространственные модели 189

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

Математический метод и другие науки.—Теория вероятностей, ее обоснование.—Геометрическая вероятность, вероятностные методы в математических проблемах.—Математический аппарат теории вероятностей: комбинаторика, образующие функции, конечные разности, математическое ожидание, характеристические функции.—Теория ошибок.—Математическая статистика, ее применение 228

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

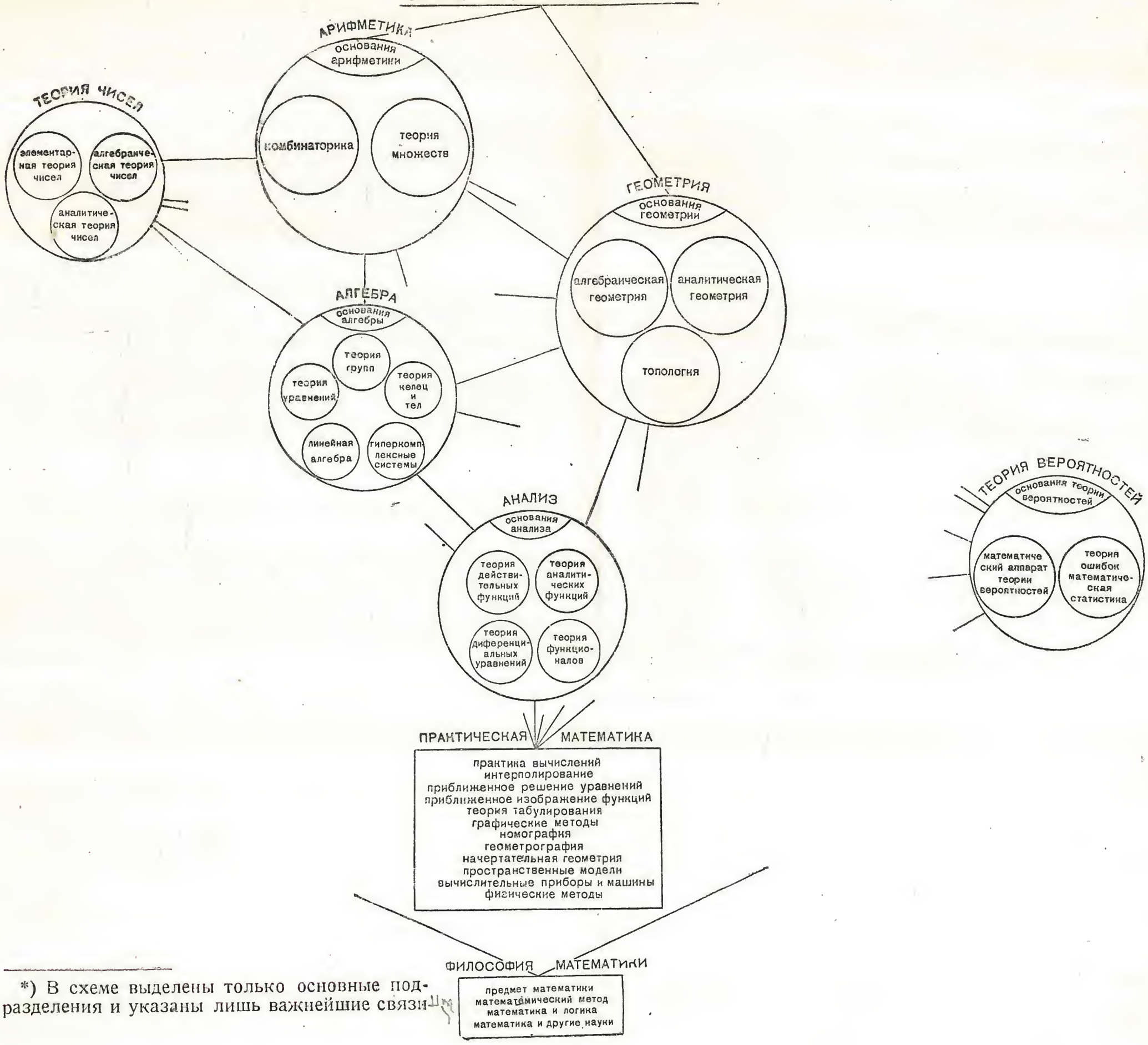
Математика и философия.—Кризис оснований математики. — Формализм. — Конвенционализм. — Интуиционизм.—Эффективизм.—Эмпиризм.—Диалектический материализм и математика. 253

Именной указатель 307

Список литературы. 314

Структура современной математики 317

СТРУКТУРА СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ *)



*) В схеме выделены только основные подразделения и указаны лишь важнейшие связи.